Simetría, congruencia y semejanza

National Council of Teachers of Mathematics

trillas

TEMAS DE MATEMATICAS

18

18. SIMETRÍA, CONGRUENCIA Y SEMEJANZA

Este cuaderno es uno de los diez nuevos títulos que ha elaborado el National Council of Teachers of Mathematics, los que se suman a la serie de ocho ya aparecidos y reimpresos varias veces en la versión castellana.
Como cada uno de los ocho cuadernos mencionados, el presente, el número dieciocho en la colección, ha sido escrito para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Comprende la exposición del tema, **Simetría, congruencia y semejanza,** básico en matemáticas. Este tema, como los que trata la serie, ahora de dieciocho, se halla entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.
Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje, transmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática, tratados en cada uno de estos cuadernos.
Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of

TEMAS

Colección DE

MATEMATICAS

Traducción:

Federico Velasco Coba
Coordinador del Instituto de Geofísica
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Revisión técnica:

Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

18 Simetría, congruencia y semejanza

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.

Editorial Trillas
México, 1972

Título de esta obra en inglés
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet number 18. Symmetry Congruence and Similarity

Primera edición en español, 1970
Reimpresión, 1971
Segunda reimpresión, enero 1972

Av. 5 de Mayo 43 105, México 1, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prólogo

Este cuaderno es una de las diez nuevas unidades de una serie introducida en 1964 por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM). Como los ocho primeros cuadernos recibieron tan buena acogida (ya se han reimpreso varias veces), se pensó que una extensión de los temas tratados sería conveniente.

Como los primeros cuadernos (núms. 1 al 8), las nuevas unidades se han escrito pensando más bien en los profesores de escuelas primarias que en sus alumnos. Cada cuaderno presenta la exposición de un tema básico de las matemáticas. Los temas escogidos están entre aquellos con los que deben familiarizarse los profesores de primaria para poder tratar con verdadera comprensión las matemáticas que por lo común se enseñan en la escuela primaria. Los cuadernos presentan una introducción al tema que enfocan, no un tratamiento exhaustivo de él; el lector interesado puede estudiar estos temas con mayor profundidad en otras publicaciones.

Los temas se han escogido especialmente con el propósito de proporcionar material básico a los profesores que creen que las experiencias de aprendizaje que se proporcionan a los niños en sus primeros años escolares deben incluir una introducción sencilla a algunos de los *conceptos unificadores centrales de la matemática*. Muchos profesores se han encontrado con que su educación profesional no les preparó para la enseñanza de la aritmética de un modo acorde con este punto de vista. Las autores tienen la esperanza, al igual que el NCTM, que esta serie de cuadernos pueda ayudar a los profesores, y también a otros, y ciertamente a todas las personas interesadas en mejorar la enseñanza de las matemáticas.

Los primeros títulos son los siguientes:

Cuaderno 1: *Conjuntos*
Cuaderno 2: *Números enteros*
Cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4: *Algoritmos para las operaciones con números enteros*
Cuaderno 5: *Números y sus factores*
Cuaderno 6: *Números racionales*

Cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8: *Proposiciones numéricas*

Los nuevos títulos son los siguientes:

Cuaderno 9: *El sistema de los enteros*
Cuaderno 10: *El sistema de los números racionales*
Cuaderno 11: *El sistema de los números reales*
Cuaderno 12: *Lógica*
Cuaderno 13: *Gráficas, relaciones y funciones*
Cuaderno 14: *Geometría informal*
Cuaderno 15: *Medida*
Cuaderno 16: *Recopilación, organización e interpretación de datos*
Cuaderno 17: *Sugerencias para resolver problemas*
Cuaderno 18: *Simetría, congruencia y semejanza*

Se sugiere que, de ordinario, los cuadernos se lean en el orden de los números que se les asignó, pues, hasta cierto punto, se ha seguido un proceso en espiral para tratar los distintos temas.

Los nuevos cuadernos comenzaron a prepararlos en 1966 los miembros de un grupo de verano de escritores. Los autores expresan aquí su más sincero agradecimiento a las siguientes personas por haber leído parte de los manuscritos y por sus cambios de impresiones con los autores durante la preparación de los cuadernos: a Joseph M. Trotter, principal de la Escuela de San Luis Rey, y a Bonita Trotter, profesora de la Laurel School, ambos del Distrito Oceánico de la Union School; a John M. Hoffman, Director de la Sección de Recursos Educativos de la Comunidad del Departamento de Educación del condado de San Diego; y a James E. Inskeep, Jr., profesor de Educación en el San Diego State College. Los autores se sienten en deuda especialmente para con Alice C. Beckenbach por su amplia ayuda en la organización y edición del material para varios de los cuadernos. Expresan también su más profundo agradecimiento a Elaine Barth y a su espléndido grupo de mecanógrafos por su excelente trabajo en la preparación del manuscrito.

El nuevo proyecto, emprendido para proseguir el trabajo del anterior, lo inició y apadrinó el Comité de Publicaciones Suplementarias de la NCTM bajo la presidencia de William Wooton. La NCTM, que proporcionó apoyo financiero, hace ahora público su agradecimiento al grupo de autores de la presente extensión de la serie "Tópicos". A continuación damos sus nombres.

George Arbogast
Manuel P. Berri
Marguerite Brydegaard
Louis S. Cohen
Helen L. Curran
Patricia Davidson
Walter Fleming
Joseph Hashisaki
Lenore S. John
David Johnson
Robert H. Sorgenfrey
J. Dean Swift
William Wooton
Edwin F. Beckenbach, *Coordinador*

Indice general

Simetría, congruencia y semejanza

CUADERNO 18

INTRODUCCIÓN

En el cuaderno 14: *Geometría informal,* presentamos una introducción elemental a algunas de las ideas básicas de la geometría. Comenzando con una discusión de los conceptos fundamentales acerca de las rectas, semirrectas, rayos, segmentos, planos y ángulos geométricos, seguimos hasta investigar algunas de las propiedades fundamentales de varias figuras planas y tridimensionales familiares, figuras con las que aun niños de muy corta edad tienen un contacto cotidiano.

El presente cuaderno tiene como finalidad reafirmar y extender estas nociones mediante una descripción intuitiva de las relaciones geométricas de simetría, congruencia y semejanza. Tanto el texto como los grupos de ejercicios incluyen numerosos ejemplos de dobleces de papel y otras actividades que el lector mismo ha de efectuar y que lo ayudarán a visualizar estas relaciones claramente. Como vamos a pedir al lector que participe en una gran cantidad de tareas de dibujo y "doblaje", será necesario que tenga a mano varias hojas de papel delgado, lápiz y tijeras.

SIMETRÍA

Ejes de simetría

En esta sección vamos a explorar un concepto geométrico conocido como *simetría.* Dibujemos la región cerrada que aparece en la figura 1, cortemos por el trazo y doblémosla luego por la recta interrumpida de manera que el segmento inferior se doble sobre sí mismo. El lector encontrará que las dos regiones poligonales de cada lado de la recta coinciden exactamente. La recta interrumpida se llama *eje de simetría.*

Sígase el mismo procedimiento para cada una de las regiones cerradas dibujadas en la figura 2. ¿En cuál o cuáles de los diagramas indican las rectas de trazo interrumpido ejes de simetría? El lector debe haber descu-

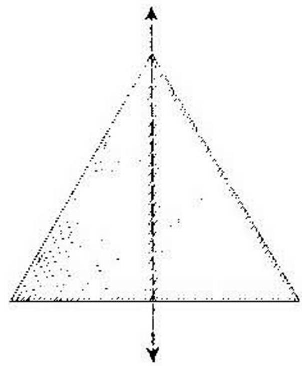
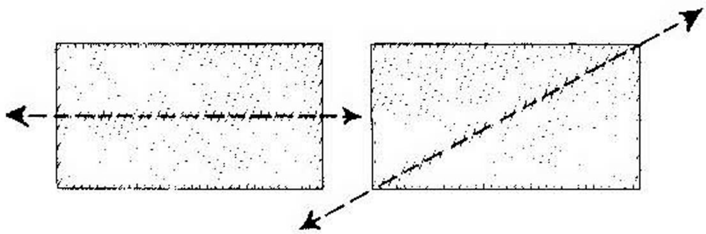
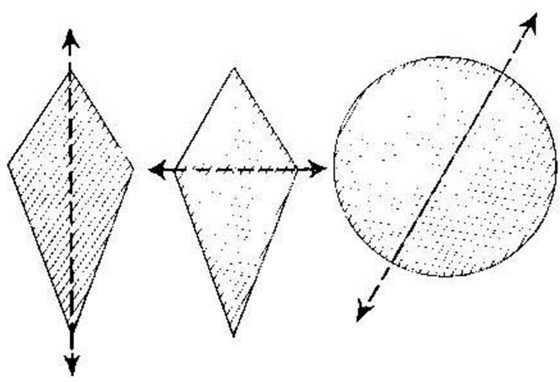


FIGURA 1



(a) (b)



(c) (d) (e)

FIGURA 2

bierto que las rectas de trazo interrumpido en (b) y (d) no son ejes de simetría, puesto que en ambos casos las dos regiones a cada lado no coinciden exactamente cuando se doblan hasta juntarse a lo largo de esas rectas.

Antes que pidamos al lector que halle ejes de simetría para unas cuantas figuras, vamos a darle un poco más de práctica en el reconocimiento de estos ejes. En la figura 3, ¿cuáles de las rectas de trazo interrumpido

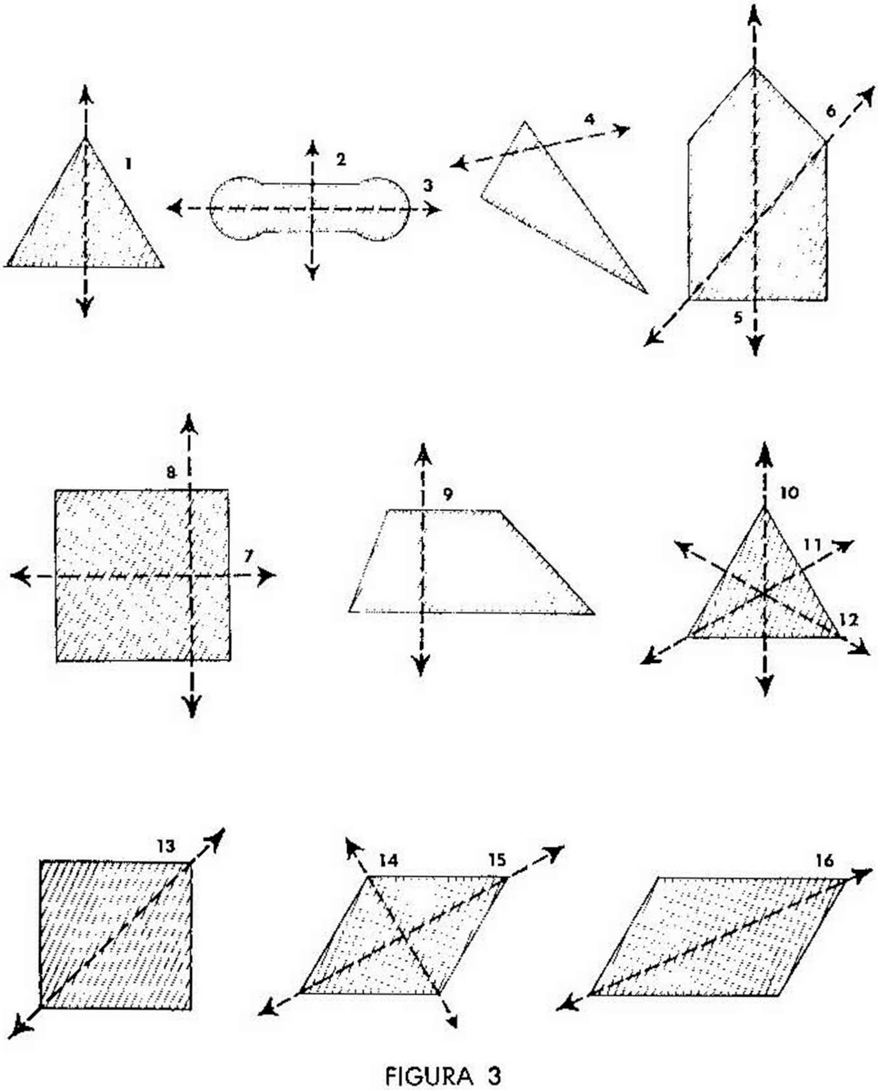


FIGURA 3

son ejes de simetría? Las rectas han sido numeradas, ya que en algunas de las regiones cerradas pedimos al lector que pruebe con más de una recta. El lector debe ser capaz de visualizar la respuesta en la mayoría de los casos sin tener que trazar realmente la región cerrada correspondiente y doblarla por la recta dada para ver como ajustan los dos lados.

Las rectas con los siguientes números representan ejes de simetría: 1, 2, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Las restantes rectas no son ejes de simetría.

Si el lector mira a su alrededor, probablemente verá muchos ejes de simetría, quizá en el dibujo del papel tapiz, quizá en la posición de las puertas y ventanas sobre la pared de la habitación, quizá sobre un dibujo de un rostro humano de facciones muy regulares. (Véase la figura 4.)

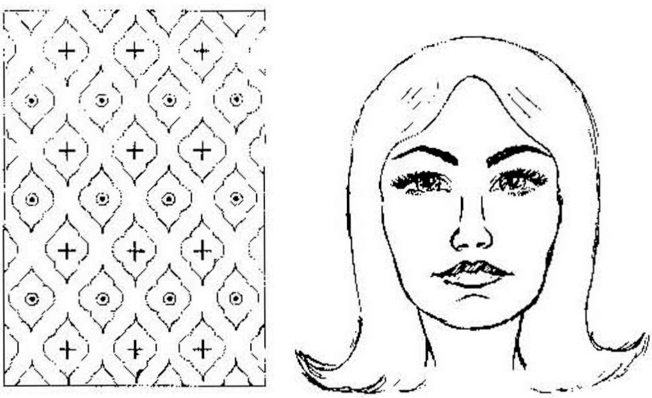


FIGURA 4

La noción de un eje de simetría sugiere un método abreviado para hacer recortes de figuras simétricas. Por ejemplo, para recortar una figura en forma de corazón, podemos doblar una hoja de papel, como se indica en la figura 5, y dibujar la mitad de un corazón de modo que el eje de simetría de tal figura coincida con la recta por la que hemos doblado el papel.

FIGURA 5

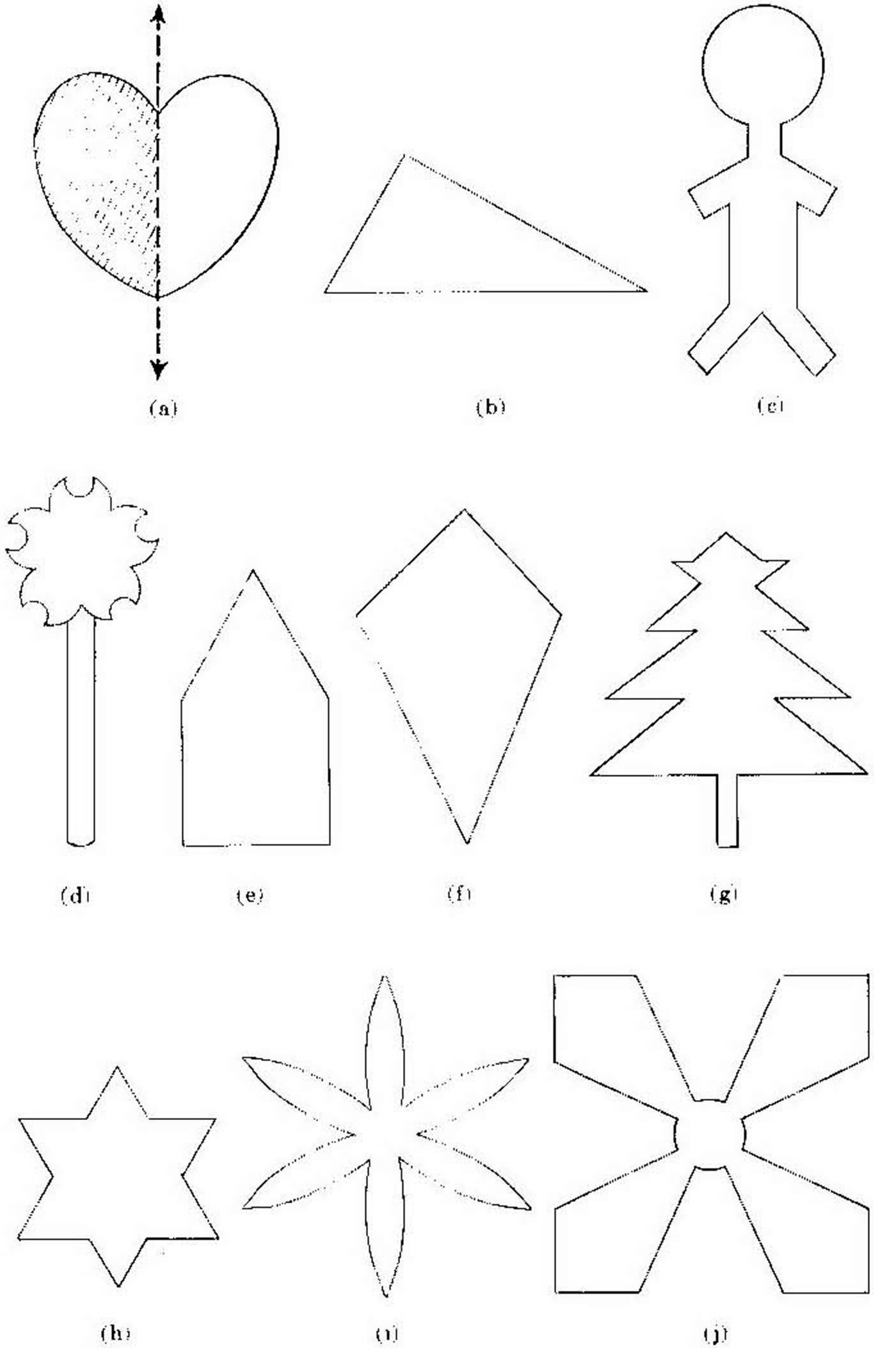
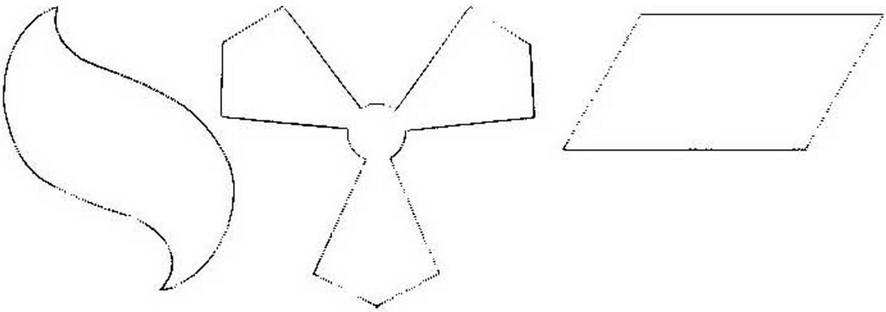


FIGURA 6. (continúa en la página siguiente)

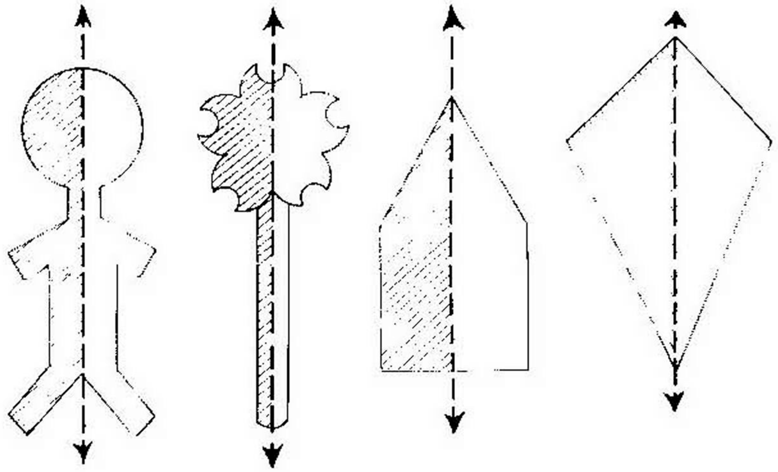


(k) (l) (m)

FIGURA 6

Entonces, cuando cortamos la hoja doblada de papel por la línea de trazo interrumpido y luego la desdoblamos, el resultado será un éxito completo.

¿Cuáles de los objetos dibujados en la figura 6 puede hacer el lector empleando un método similar? Sobre una copia de cada uno de los objetos, trácense suficientes líneas para indicar la parte que realmente tenemos que dibujar. Dibújese con trazo interrumpido, además, el eje de simetría que el lector emplearía como doblez para el papel Si el lector no puede encontrar



(c) (d) (e) (f)

FIGURA 7. (continúa en la página siguiente)

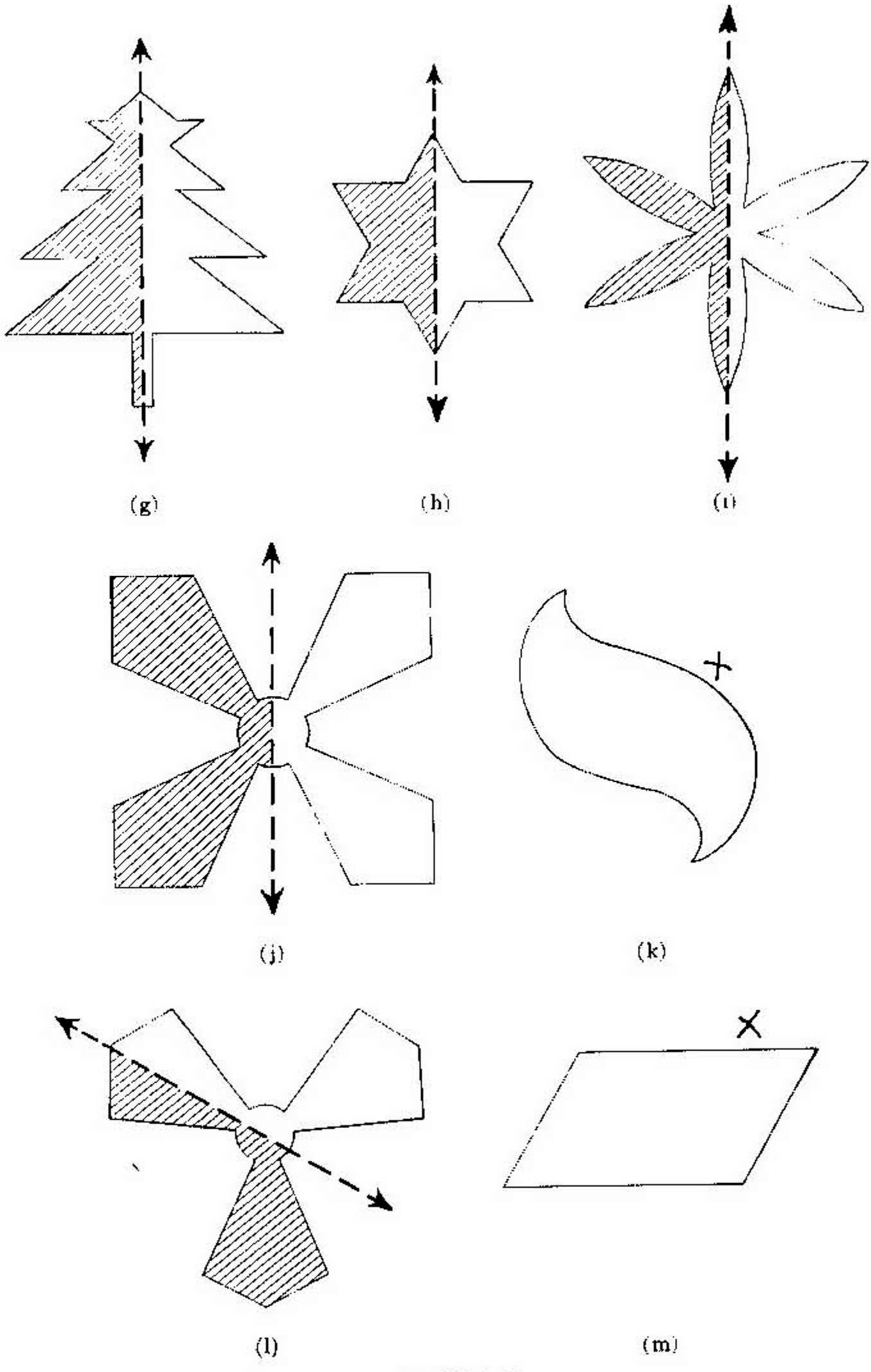


FIGURA 7

tal eje de simetría, ponga una cruz, ×, al lado del dibujo. En las dos primeras figuras (a) y (b), hicimos los trazos que debería hacer el lector. Colóquese ahora el "eje de simetría" contra la recta por la que se ha doblado otra hoja de papel y, usando la parte sombreada como patrón, córtese la hoja doblada. ¿No recibe el lector algunas sorpresas? Colóquese el resultado final encima del dibujo correspondiente en la figura 6. Deben coincidir. En la figura 7 se da una posible solución.

Se puede usar la simetría para encontrar el punto medio de un segmento dado y la bisectriz de un ángulo dado. Discutamos primero el caso del segmento. Tracemos el segmento $\overline{AB}$ que aparece en la figura 8. Doblemos el papel de manera que los puntos A y B coincidan. En la figura 9, el punto C, donde la recta del doblez $\overleftrightarrow{DE}$ interseca al segmento $\overline{AB}$, es el *punto medio* de $\overline{AB}$. Es decir, C separa a $\overline{AB}$ en dos segmentos, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, que son réplicas exactas uno del otro (figura 10).

FIGURA 8

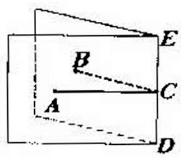


FIGURA 9

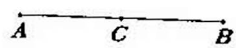


FIGURA 10

De manera análoga, podemos trazar el ángulo $\angle CAB$ de la figura 11 y doblar el papel de modo que $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ coincidan. Entonces, la recta de pliegue, llamémosla $\overleftrightarrow{AD}$, es, ciertamente, un eje de simetría de $\angle CAB$, a la que llamamos *bisectriz* de $\angle CAB$. Los dos ángulos, $\angle CAD$ y $\angle DAB$, de la figura 11 son réplicas exactas uno del otro.

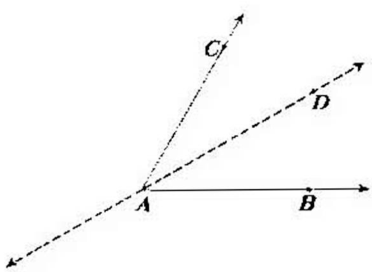


FIGURA 11

Después de un párrafo más sobre simetría, introduciremos la palabra que se usa en geometría para describir figuras que son réplicas exactas una de la otra y luego extenderemos la noción general de este importante concepto geométrico.

Centro de simetría

Veamos de nuevo el segmento $\overline{AB}$ y su punto medio C, que aparecen en la figura 10. El lector puede ver intuitivamente que para cada punto sobre $\overline{AB}$ hay otro punto sobre $\overline{AB}$ tal que C biseca el segmento que une los dos puntos. La figura 12 muestra un par de tales puntos, D y E. El punto

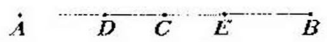


FIGURA 12

medio C se llama, por tanto, *centro de simetría* para $\overline{AB}$, porque $\overline{AB}$ es simétrico con respecto a C. Una figura geométrica es simétrica con respecto a un punto O si y sólo si para cada punto A sobre la figura hay algún

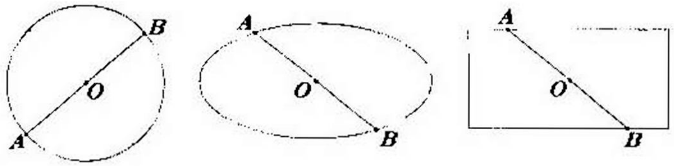
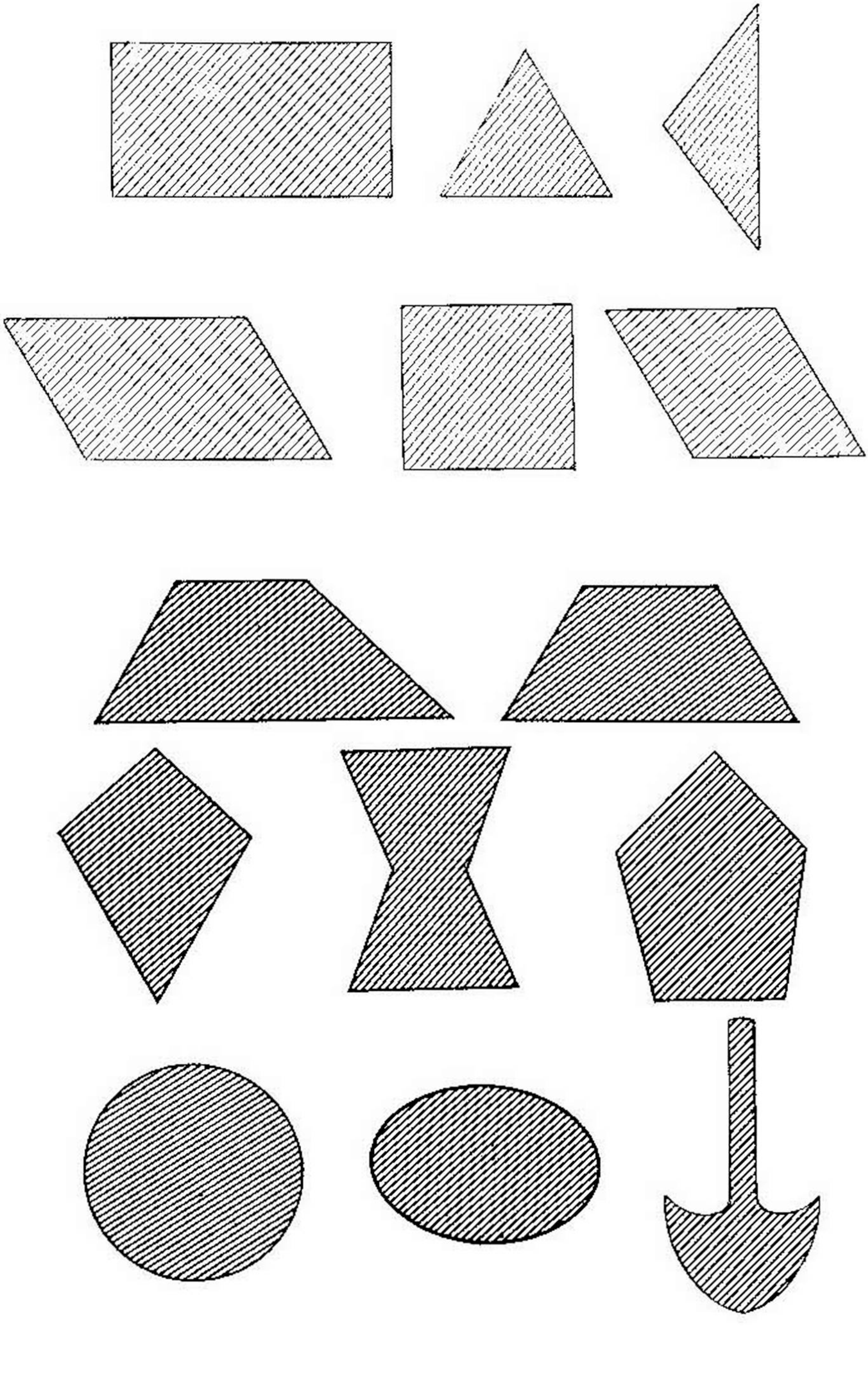


FIGURA 13

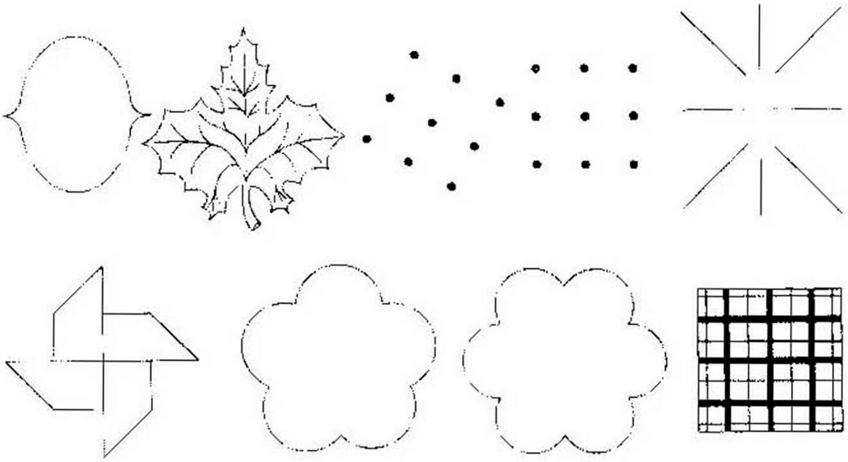
punto B sobre la figura, tal que O biseca a $\overline{AB}$ (es decir, es el punto medio de $\overline{AB}$). El punto O es un centro de simetría para cada uno de los dibujos de la figura 13.

GRUPO DE EJERCICIOS 1

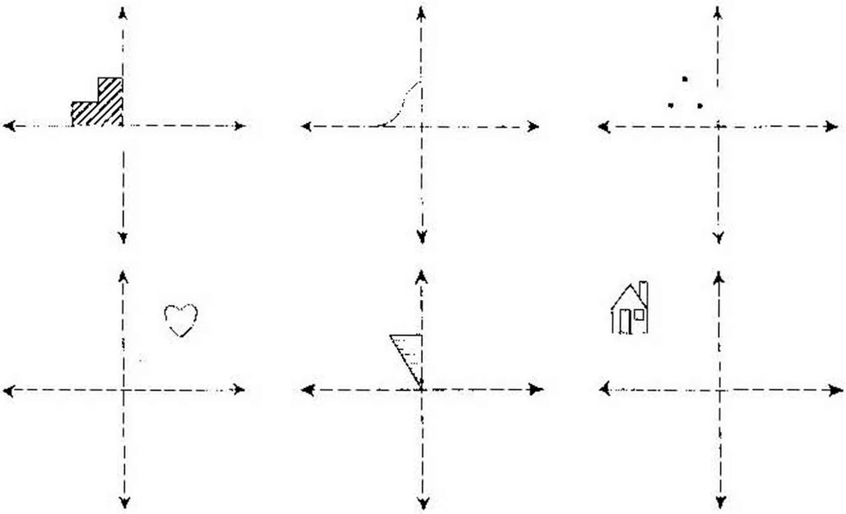
1. Trácense rectas de trazo interrumpido para mostrar todos los ejes de simetría para trazados de cada una de las regiones cerradas que abajo aparecen. Si una región cerrada no tiene ningún eje de simetría, márquese un signo ✕ cerca de ella.



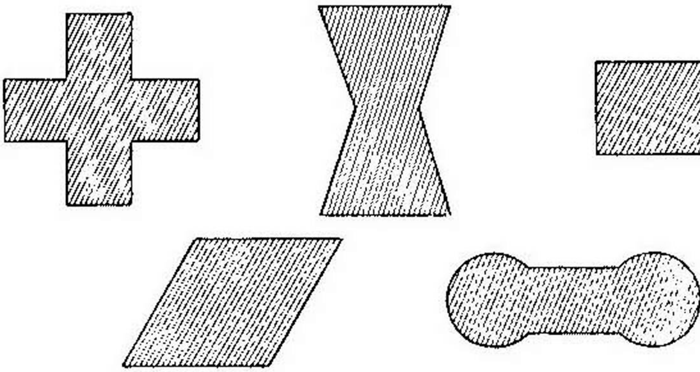
2. Hasta el momento, hemos considerado los ejes de simetría posibles solamente para varias *regiones*. Generalícese nuestro trabajo sobre ejes de simetría trazando todos los ejes de simetría sobre copias de las siguientes configuraciones.



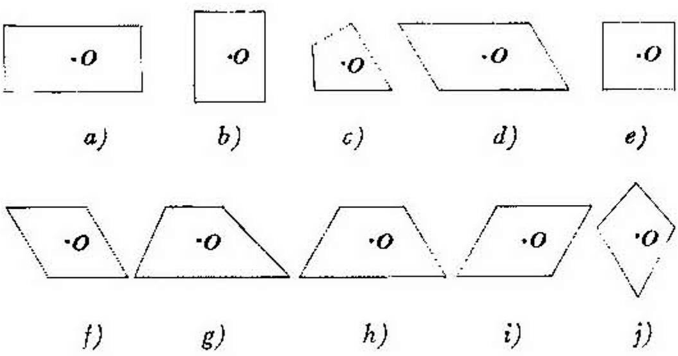
3. Complétese el trazado de cada una de las figuras que aparecen abajo de modo que sean simétricas respecto a *las dos* rectas de trazo interrumpido dadas.



4. Cada uno de los siguientes objetos podría cortarse de una hoja de papel que ha sido doblada dos veces. Sobre una copia del borde dibújense dos rectas de trazo interrumpido para indicar las dos rectas de pliegue que podemos usar; suponiendo que el papel ha sido doblado, sombréese la parte del dibujo que se debería trazar en el papel para recortarla.



5. En cada uno de los cuadriláteros que aparecen abajo, ¿es el O un punto de simetría central?



6. Trácese una figura que tenga infinitos ejes de simetría.

CONGRUENCIA

La noción de congruencia

Dos objetos cualesquiera que son réplica exacta uno del otro, se dice que son *congruentes*. Físicamente, dos figuras geométricas planas pueden

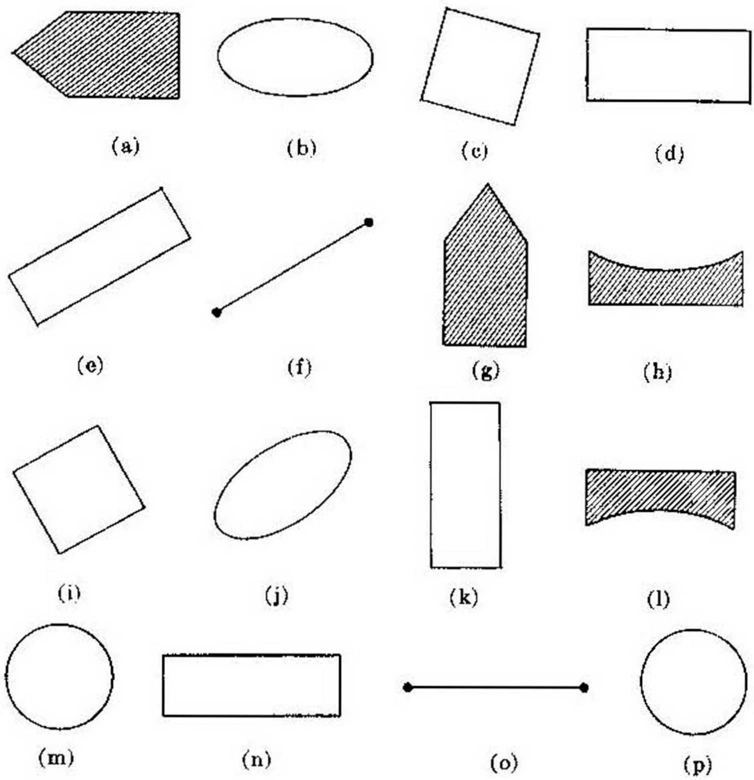


FIGURA 14

someterse a prueba en cuanto a congruencia se refiere, observando si pueden ponerse juntas de manera que coincidan exactamente. Podemos describir esta situación intuitivamente diciendo que las figuras congruentes tienen el mismo tamaño y la misma forma. Vea el lector si puede encontrar pares de figuras congruentes en la figura 14.

Las parejas de figuras congruentes son: (a) y (g), (b) y (j), (c) e (i), (d) y (k), (e) y (n), (f) y (o), (h) y (l), (m) y (p).

Todos estamos familiarizados con el concepto de congruencia. Las páginas de este cuaderno son congruentes una a otra; también todas las *c* minúsculas lo son. Las bandas de ensamble en una fábrica constantemente producen objetos "congruentes" que deben satisfacer ciertas condiciones en cuanto a forma y tamaño. Posiblemente el lector podría proporcionar otros ejemplos.

Segmentos congruentes

La figura geométrica más simple con la que podemos ilustrar la noción de congruencia es el segmento rectilíneo. Nos anticipamos un poco a esta discusión al final de la sección anterior, en donde definimos el punto medio C de $\overline{AB}$ como el punto que separa al segmento en dos segmentos, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, que son réplica exacta uno del otro. Esta definición, un poco complicada, de punto medio, puede formularse de un modo mucho más conciso en términos de congruencia:

> *El punto medio de un segmento es el punto que separa al segmento en dos segmentos congruentes.*

Si C es el punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{AC}$ es congruente con $\overline{CB}$. Podemos usar el símbolo $\cong$ y expresar esta relación como $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ (lo que debe leerse: "el segmento AC es congruente con el segmento CB"). Desde luego, dos segmentos rectilíneos no necesitan ser parte de la misma recta para ser congruentes.

Una forma útil de determinar si dos segmentos son congruentes o no, es la de usar un compás. Si las puntas del compás se colocan en los extremos del primer segmento y si al ser llevadas al segundo segmento también caen exactamente en los extremos del segundo segmento, entonces los dos segmentos son congruentes. El compás se usa también de manera análoga para *construir* un segmento congruente a un segmento dado.

¿Cuáles de los cinco segmentos de la figura 15 son congruentes? Bien

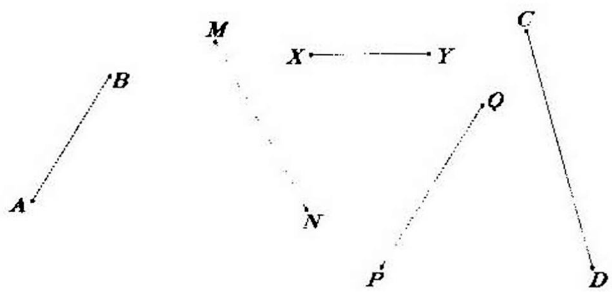


FIGURA 15

sea que usemos papel para calcar o compás, el lector encontrará que solo hay un par de segmentos congruentes: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$.

Antes de proceder con lo que sigue, distinguiremos entre el uso del símbolo $=$ y el símbolo $\cong$ en geometría. En la figura 16 vemos que $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son, obviamente, iguales porque denominan al *mismo* segmento. Expre-

FIGURA 16

samos esto como $\overline{AB} = \overline{BA}$. No es correcto, sin embargo, decir que "$\overline{AB} = \overline{EF}$", porque $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ denominan a dos segmentos *diferentes*. La manera de expresar que $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ son réplicas exactas uno del otro, consiste en decir que $\overline{AB} \cong \overline{EF}$; es decir, que el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{EF}$. Desde luego, cualquier segmento es una réplica exacta de él mismo y, por tanto, es congruente consigo mismo como también es igual a sí mismo. de donde, en la figura 16, cada una de las siguientes afirmaciones es cierta:

$$\overline{AB} = \overline{BA} \quad \text{y} \quad \overline{AB} \cong \overline{BA}.$$

Ángulos congruentes

En la figura 17, si $\overleftrightarrow{AD}$ biseca a $\angle CAB$, podemos enunciar simplemente que $\angle CAD \cong \angle DAB$. La bisectriz de un ángulo y los dos lados del mismo

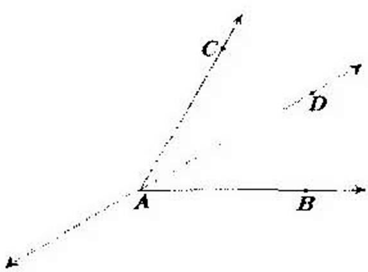


FIGURA 17

forman dos nuevos ángulos congruentes. Podemos considerar a la recta $\overleftrightarrow{AD}$ o el rayo $\overrightarrow{AD}$ como la bisectriz de $\angle CAB$, aunque solamente el rayo $\overrightarrow{AD}$ es realmente un lado de $\angle CAD$ y de $\angle DAB$.

Discutamos en seguida la relación de congruencia para dos ángulos cualesquiera. Supongamos que existen dos ángulos, digamos $\angle PQR$ y $\angle XYZ$ como se ve en la figura 18. Para ver si $\angle PQR$ es congruente con $\angle XYZ$, calquemos $\angle PQR$ y coloquemos el calco, $\angle P'Q'R'$, sobre $\angle XYZ$ de manera que el vértice Q' coincida con el vértice Y y $\overrightarrow{Q'R'}$ coincida con $\overrightarrow{YZ}$.

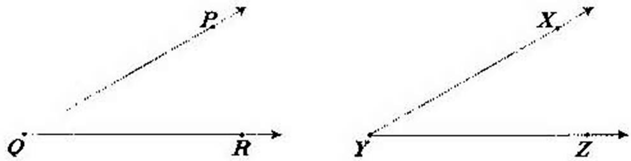


FIGURA 18

Si, entonces, $\overrightarrow{Q'P'}$ coincide con $\overrightarrow{YX}$, como aparece indicado en la figura 19, los dos ángulos son réplica exacta uno del otro, y escribimos "$\angle PQR \cong \angle XYZ$".

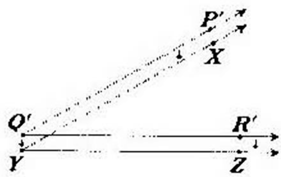


FIGURA 19

En un tratamiento más formal de la geometría, la congruencia de dos ángulos se define usualmente en términos de su *medida*.* Es decir, dos ángulos son congruentes si y sólo si tienen la misma medida.

Exactamente lo mismo que toda recta es una réplica exacta de toda otra recta, también se tiene que todo rayo es congruente con cualquier otro rayo. En la figura 20(a), sin embargo, los dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ quizá parezca que no son congruentes por la forma en que se han dibujado. Análogamente, en la figura 20(b) los dos ángulos congruentes, $\angle ABC$ y $\angle DEF$, tal vez parezca que no son réplicas exactas. En general, es útil dibujar figuras congruentes de tal modo que parezcan como verdaderas réplicas.

* Esta afirmación parece realmente muy discutible. [*N. del T.*]

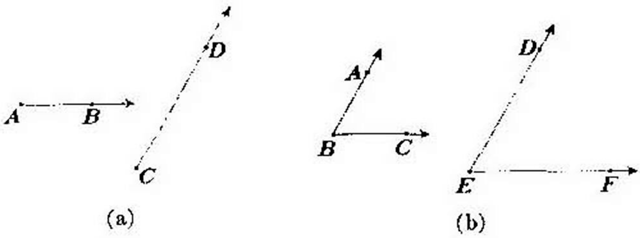


FIGURA 20

Una clase importante de ángulo frecuentemente mencionado en el estudio de la geometría es el ángulo recto. Un modo sencillo de construir un ángulo recto consiste en dibujar la recta $\overleftrightarrow{AB}$ sobre una hoja de papel transparente y luego doblar la hoja de manera que $\overleftrightarrow{AB}$ se doble sobre sí misma. Una vez hecho esto desdoblamos el papel y dibujamos una recta de trazos, $\overleftrightarrow{CD}$, sobre la recta de pliegue. Tendremos entonces cuatro ángulos congruentes con un vértice común en E, el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ (figura 21). Para expresar este hecho escribimos $\angle AEC \cong \angle CEB \cong \angle BED \cong \angle DEA$. Cada uno de estos ángulos es un ángulo recto. El símbolo ⏋ en el vértice de uno de ellos es de uso frecuente en un dibujo para señalar un ángulo recto.

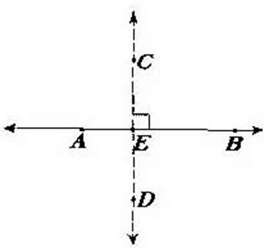


FIGURA 21

En la figura 21 se dice que la recta $\overleftrightarrow{CD}$ es *perpendicular* a la $\overleftrightarrow{AB}$. El símbolo $\perp$ denota la noción de perpendicularidad, de modo que escribimos $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$. En general, dos rectas que se intersecan son perpendiculares si y sólo si los cuatro ángulos formados en su punto de intersección son ángulos rectos. Dos rayos, dos segmentos o un segmento y un rayo son perpendiculares uno a otro si las dos rectas de las que son parte son perpendiculares una a otra.

Para obtener una recta que es perpendicular a una recta dada y que pasa por un punto no dado sobre la recta dada, el lector puede proceder como sigue: dibújese una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto C no sobre $\overleftrightarrow{AB}$, como en la figura 22(a). Dóblese ahora el papel de forma que C se encuentre sobre la línea de pliegue y $\overleftrightarrow{AB}$ se doble sobre sí misma, como puede verse en la

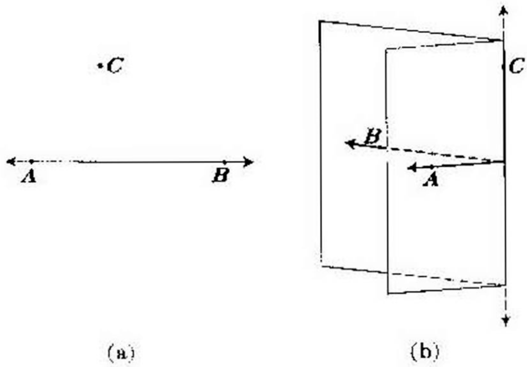


FIGURA 22

figura 22(b). Cuando se desdobla el papel, la recta del pliegue que pasa por C será perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

Congruencia y simetría

El concepto de simetría está estrechamente relacionado con el de congruencia, pero la congruencia no depende en absoluto de la simetría. Es decir, dos figuras que tienen el mismo tamaño y forma son congruentes

FIGURA 23

independientemente de que estén colocadas o no, de manera que sean simétricas respecto a alguna recta o punto. Por ejemplo, los triángulos de la figura 23 son congruentes simplemente porque son réplica exacta uno del otro.

El siguiente ejemplo ilustra una vez más cómo es que la congruencia no depende de la simetría. Si calcamos el rectángulo dibujado en la figura 24 y lo doblamos por la recta diagonal de trazo interrumpido, $\overleftrightarrow{AC}$, en-

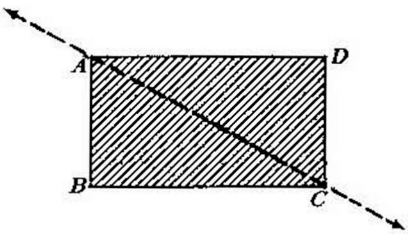


FIGURA 24

contraremos que las dos regiones triangulares no encajan exactamente una sobre la otra. En realidad el resultado sería como el que aparece en el diagrama de la figura 25, que muestra claramente que $\overleftrightarrow{AC}$ no es un eje de simetría. Sin embargo, las dos regiones triangulares limitadas por los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$, respectivamente, son congruentes. Podemos colocar $\triangle CDA$ sobre $\triangle ABC$ de manera que coincidan exactamente; solamente

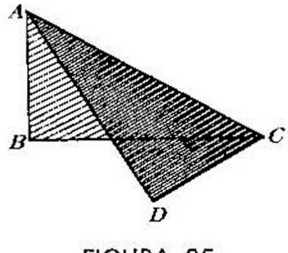


FIGURA 25

necesitamos hacer girar $\triangle CDA$ en la misma dirección que la de las manecillas del reloj hasta que el vértice D coincida con el vértice B y el vértice C de $\triangle CDA$ coincida con el vértice A de $\triangle ABC$, como se indica en la figura 26. Este emparejamiento de vértices de $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$ establece una *correspondencia biyectiva* entre pares de ángulos congruentes y de

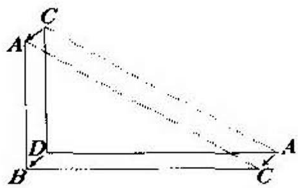


FIGURA 26

lados congruentes. Así, en la figura 26 $\angle ABC \cong \angle CDA$, $\angle BCA \cong \angle DAC$ y $\angle CAB \cong \angle ACD$. Análogamente, los lados correspondientes son congruentes, como sigue: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{DA}$, y $\overline{CA} \cong \overline{AC}$. En general, dos triángulos son congruentes si, para algún emparejamiento de sus vértices, las partes correspondientes (ángulos y lados) son congruentes.

La región original puede considerarse como la unión de dos regiones triangulares congruentes (figura 27).

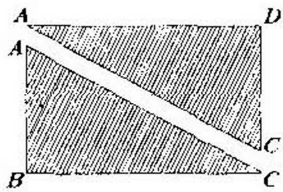


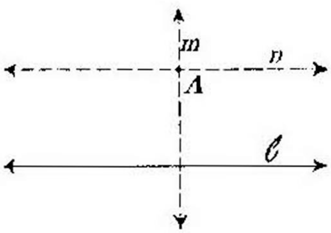
FIGURA 27

GRUPO DE EJERCICIOS 2

1. Cítense ejemplos de objetos congruentes de entre los que el lector puede encontrar en un supermercado, en una fábrica de automóviles, en una granja o en una cocina.

2. Dibújese una recta horizontal l y un punto A no sobre l. Encuéntrese primero la recta que contiene a A y es paralela a la recta l haciendo un doblez vertical en el papel tal que la recta l se dobla sobre sí misma y A se encuentre sobre ese doblez; a continuación se hace un doblez horizontal de modo que la primera recta de pliegue se doble sobre sí misma y A se encuentre también sobre este segundo pliegue. Esta segunda recta de pliegue debe, entonces, ser paralela a la recta l. Nótese que la recta del primer doblez, llamémosla m, es perpendicular a la recta dada

l, y que la segunda recta de pliegue, llamémosla n, es perpendicular a la primera recta de pliegue, m, como abajo puede verse dibujado. Obsérvese, además, que las rectas paralelas a n y l son, ambas, perpendiculares



a la recta m. ¿No parece cierto que si dos rectas de un plano son perpendiculares a una misma recta, entonces son paralelas una a otra?

3. Cálquese la figura que sigue:

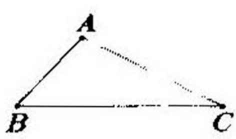
Encuéntrese el punto medio del segmento $\overline{AB}$ doblando el papel adecuadamente.

a) Si el punto medio es C y si D es otro punto cualquiera sobre la recta de pliegue, ¿cuál es la relación entre las dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$?

b) ¿Qué clase de ángulo es $\angle ACD$?

c) Nómbrese otro ángulo recto formado por estas rectas. (La recta $\overleftrightarrow{CD}$ se llama mediatriz del segmento $\overline{AB}$.)

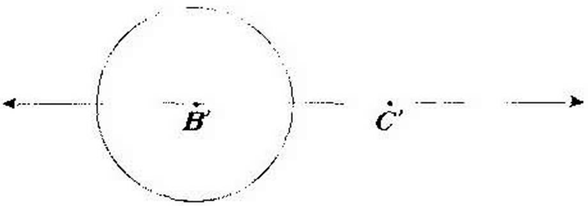
4. Dado un triángulo cualquiera, por ejemplo, el que aparece a la derecha, $\triangle ABC$, podemos construir un triángulo congruente con él, del siguiente modo:



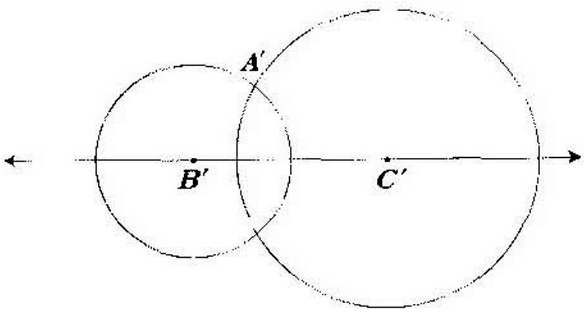
i) Dibujemos una recta en nuestro papel. Marquemos un punto cualquiera B' sobre la recta.

ii) Coloquemos las dos puntas de un compás de manera que coincidan sobre B y C y marquemos un segmento $\overline{B'C'}$ sobre nuestra recta de modo que $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$:

iii) Volvamos a colocar las dos puntas del compás de modo que coincidan sobre A y B. Con B' como centro, dibujemos un círculo:

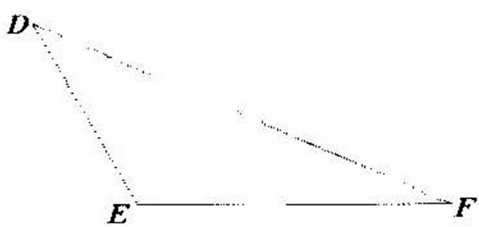


iv) Coloquemos una vez más las puntas de nuestro compás ahora de modo que coincidan sobre A y C. Con C' como centro, dibujemos un círculo. Estos dos círculos se intersecarán en dos puntos. Rotúlese cualquiera de estos puntos como A'. Dibújense los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$. Entonces $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$.



a) Nómbrense los tres pares de lados que son congruentes.
b) Nómbrense los tres pares de ángulos que son congruentes.

5. Constrúyase un triángulo congruente con el $\triangle DEF$.



CLASIFICACIÓN DE FIGURAS PLANAS

Clasificación de los triángulos

Una vez que hemos definido la congruencia para los segmentos y para los ángulos, podemos usar esta noción en la clasificación de los triángulos, como sigue:

a) Si los tres lados de un triángulo son congruentes, el triángulo se llama *equilátero* (de la palabra latina que significa "lados iguales").
b) Si dos lados de un triángulo son congruentes, el triángulo se llama *isósceles* (de la palabra griega que significa "piernas iguales").
c) Si ningún lado de un triángulo es congruente con ningún otro lado, el triángulo se llama *escaleno* (de la palabra griega para designar "desigual" o "disparejo").
d) Si tres ángulos de un triángulo son congruentes, el triángulo es un triángulo *equiángulo.*
e) Si un triángulo tiene dos lados congruentes y un ángulo recto en él, el triángulo se llama *triángulo rectángulo isósceles.*

Puede mostrarse que si un triángulo es isósceles, entonces los dos ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes. Recíprocamente, si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces los dos lados opuestos a esos ángulos son congruentes, y el triángulo es isósceles. De esto se deduce fácilmente que si un triángulo es equilátero, debe ser equiángulo, y recíprocamente. Puede también mostrarse que si un triángulo es escaleno, entonces no tiene ángulos congruentes, y recíprocamente.

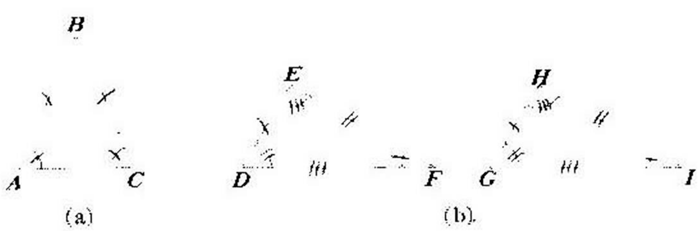
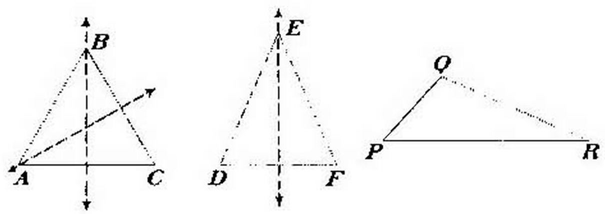


FIGURA 28

Al dibujar una figura geométrica, es habitual indicar las partes congruentes con signos análogos. Esto también constituye un procedimiento útil cuando se comparan las partes correspondientes de dos figuras congruentes.

Por ejemplo, en la figura 28(a), los lados congruentes del triángulo isósceles ABC están indicados por una sola rayita en cada uno de ellos. Análogamente, los ángulos congruentes que se oponen a estos lados también tienen una rayita sobre cada símbolo de arco. En la figura 28(b), $\overline{DE}$ y $\overline{GH}$ tienen marcas análogas, una sola rayita, para indicar que estos son lados congruentes correspondientes en los dos triángulos congruentes DEF y GHI. Las marcas dobles sobre $\overline{EF}$ y $\overline{HI}$ indican que $\overline{EF} \cong \overline{HI}$. Las marcas triples sobre los arcos indican que $\angle DEF \cong \angle GHI$.

El concepto de eje de simetría proporciona un método interesante para la clasificación de fronteras triangulares de regiones cerradas. Por ejemplo, si una región triangular tiene tres ejes de simetría, su frontera es un triángulo equilátero. En realidad, establecer la existencia de dos ejes de simetría es suficiente para asegurar que, en realidad, hay tres. En la figura 29(a),



(a) (b) (c)

FIGURA 29

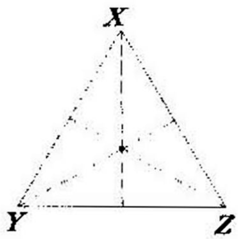
cuando $\triangle ABC$ se dobla por la línea interrumpida vertical (que es un eje de simetría), $\overline{AB}$ coincide exactamente con $\overline{BC}$; cuando $\triangle ABC$ se dobla sobre el otro eje de simetría, también señalado por una recta de trazo interrumpido, $\overline{AB}$ coincide con $\overline{AC}$. Es, por tanto, evidentemente intuitivo que $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ pueden hacerse coincidir, puesto que $\overline{AB}$ puede hacerse coincidir exactamente con cada uno de ellos. En la figura 29(b) hay solamente un eje de simetría, lo que nos dice que solamente $\overline{DE} \cong \overline{EF}$ y $\triangle DEF$ es isósceles. En la figura 29(c) no hay ningún eje de simetría, de donde $\triangle PQR$ es escaleno.

GRUPO DE EJERCICIOS 3

1. Constrúyase, usando el compás, un triángulo equilátero XYZ de manera que cada uno de sus lados sea congruente con $\overline{AB}$.

2. *a)* ¿Puede tener un triángulo equilátero un ángulo recto?
   b) ¿Puede tener un triángulo isósceles un ángulo recto?
   c) ¿Puede tener un triángulo más de un ángulo recto?

3. Los tres ejes de simetría de la región cerrada acotada por el triángulo equilátero XYZ se encuentran en un punto. Recórtese un calco de esta



región triangular hecho sobre una hoja de cartón duro y procúrese balancearlo en ese sitio sobre la punta de uno de los brazos de un compás. Inténtese balancearlo sobre cualquier otro punto de la región cerrada. ¿Qué es lo que se observa?

4. Cálquese el triángulo equilátero XYZ del ejercicio 3. Hállese, doblando adecuadamente, el punto medio W de $\overline{YZ}$.

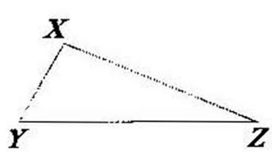
   a) ¿Pasa la línea de pliegue por el punto X?

   b) ¿Es $\overleftrightarrow{XW}$ igual recta que la de pliegue?

   c) ¿Es $\overleftrightarrow{XW}$ la mediatriz de YZ?

   d) ¿Biseca $\overleftrightarrow{XW}$ a $\angle XYZ$?

5. Por medio de dobleces adecuados, encuéntrese el punto medio W de $\overline{YZ}$ en el triángulo escaleno $\triangle XYZ$ que a continuación mostramos, y contéstense para este triángulo las preguntas del ejercicio 4, de la (*a*) a la (*d*).



6. *a)* Hágase un dibujo de una región cerrada que tenga dos ejes de simetría.
   b) Hágase un dibujo de una región cerrada que tenga cuatro ejes de simetría.

Clasificación de polígonos

No son solamente los triángulos, sino que también muchos otros polígonos los que pueden clasificarse de acuerdo a ciertas propiedades de sus lados y de sus ángulos. En el cuaderno 14: *Geometría informal*, denominamos a los polígonos de acuerdo al número de sus lados: triángulos, de tres; cuadriláteros, de cuatro; pentágonos, de cinco; hexágonos, de seis; heptágonos, de siete, y octágonos, de ocho. Los clasificamos también en convexos y cóncavos.

Otra propiedad muy a menudo considerada en la descripción de un polígono es la de regularidad.

Un polígono es regular si y sólo si todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos son congruentes.

Un triángulo equilátero es un ejemplo de polígono regular, ya que tiene tres lados congruentes y tres ángulos congruentes.

En la sección precedente dijimos que si un triángulo tiene todos sus lados congruentes, entonces de ello se sigue que todos sus ángulos son, también, congruentes. Este no es el caso para los polígonos en general. Por

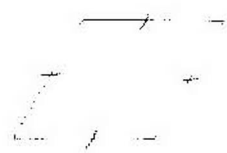


FIGURA 30

ejemplo, la figura 30 muestra un polígono convexo llamado *rombo,* en el que los cuatro lados son congruentes, pero los cuatro ángulos no necesitan serlo. Recíprocamente, tenemos el familiar polígono conocido con el nombre de *rectángulo* (figura 31), en el que los cuatro ángulos son congruentes,

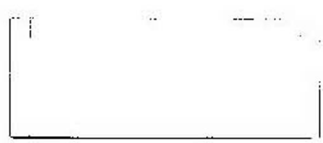


FIGURA 31

pero los cuatro lados no necesitan serlo. De aquí que ninguno de estos polígonos ha de ser necesariamente regular.

En la figura 32 se han dibujado algunos ejemplos de polígonos regulares, con su nombre común debajo de cada uno. Como lo indica la figura 32, el nombre común del cuadrilátero regular es el de cuadrado.

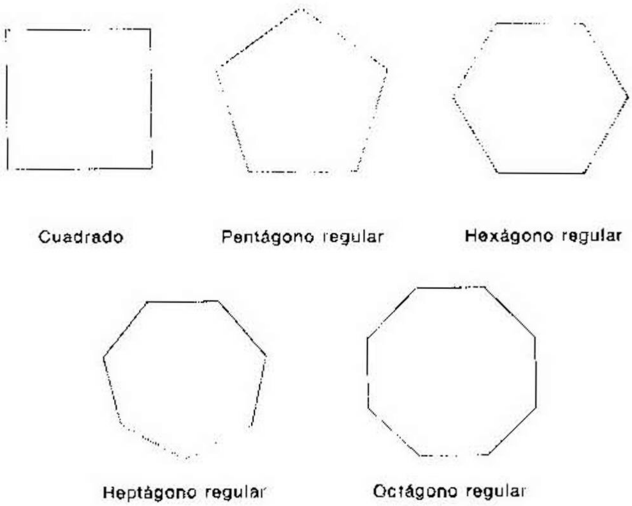


FIGURA 32

En la sección siguiente clasificaremos los cuadriláteros, en general, de acuerdo a ciertas propiedades de sus lados y de sus ángulos, exactamente como hicimos para los triángulos en la sección precedente.

GRUPO DE EJERCICIOS 4

1. Dibújense todos los ejes de simetría para cada una de las regiones cerradas limitadas por los polígonos regulares dibujados en la figura 32. ¿Puede el lector sugerir alguna regla que relacione el número de ejes de simetría con el número de lados de un polígono regular?
2. ¿Es posible para un polígono tener un número de ejes de simetría superior a su número de lados?
3. Es cierto que todos los polígonos regulares son convexos. Muéstrese que la afirmación recíproca, "todos los polígonos convexos son regulares", es falsa, mediante el dibujo de un polígono convexo cuyos lados (o ángulos) no sean, todos, congruentes.

4. ¿Es posible que un hexágono tenga
   a) exactamente dos ejes de simetría?
   b) exactamente cuatro ejes de simetría?
   c) exactamente seis ejes de simetría?

Clasificación de los cuadriláteros

Como anteriormente mencionamos, un cuadrilátero es un polígono que es la unión de cuatro segmentos. Estos cuatro segmentos determinan cuatro ángulos. Por ejemplo, en la figura 33, el cuadrilátero $ABCD$ (algunas veces denotado por el símbolo $\square ABCD$)[1] determina cuatro ángulos: $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ y $\angle DAB$. Los puntos A, B, C y D se llaman *vértices* del

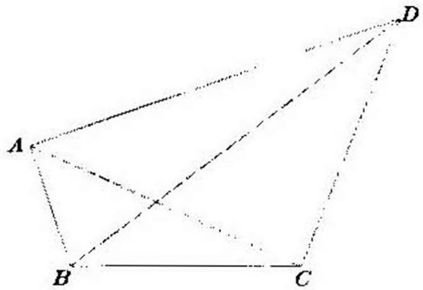


FIGURA 33

cuadrilátero; son también los vértices de los cuatro ángulos. Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se llaman *lados* del cuadrilátero. Dos lados (segmentos) cualesquiera que no tienen un punto común (vértice) se dice que son *opuestos;* dos lados cualesquiera que se intersecan en un vértice se llaman lados *adyacentes.* Análogamente, cualesquiera dos ángulos que no tienen un lado en común se dice que son ángulos *opuestos,* por ejemplo $\angle DAB$ y $\angle BCD$, $\angle ABC$ y $\angle CDA$. Cualesquiera dos ángulos que tienen un lado en común, se llaman ángulos adyacentes, como $\angle DAB$ y $\angle ABC$, $\angle ABC$ y $\angle BCD$. Los segmentos de trazos interrumpidos AC y BD se llaman *diagonales* del cuadrilátero. Una diagonal de un polígono es un segmento que une los vértices de dos ángulos no adyacentes.

[1] Debe observarse que el símbolo "$\square$" en la notación $\square ABCD$ no significa que el cuadrilátero sea un cuadrado, al igual que el "$\triangle$" en la notación $\triangle XYZ$ tampoco significa que el triángulo es equilátero: $\square ABCD$ y $\triangle XYZ$ representan *cualquier* cuadrilátero y *cualquier* triángulo, respectivamente, mientras no les asignemos otras propiedades.

Los cuadriláteros pueden clasificarse según el paralelismo y congruencia de sus lados y ángulos opuestos:

a) *Cuadrilátero escaleno:* un cuadrilátero en que no hay dos lados que sean congruentes o paralelos.
b) *Cometa:* un cuadrilátero en que son congruentes dos pares de lados adyacentes.
c) *Trapezoide:* un cuadrilátero en el que son paralelos exactamente[2] un par de lados opuestos.
d) *Trapezoide isósceles o trapecio:* un trapezoide cuyos lados no paralelos son congruentes.
e) *Paralelogramo:* un cuadrilátero en el que ambos pares de lados opuestos son paralelos.
f) *Rombo:* un paralelogramo con cuatro lados congruentes.
g) *Rectángulo:* un paralelogramo con cuatro ángulos congruentes.
h) *Cuadrado:* un rectángulo con cuatro lados congruentes.

En la figura 34 se ha dibujado un ejemplo de cada tipo de cuadrilátero.

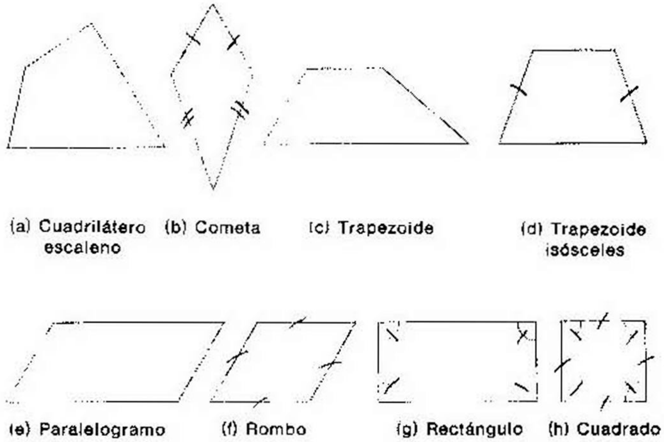


FIGURA 34

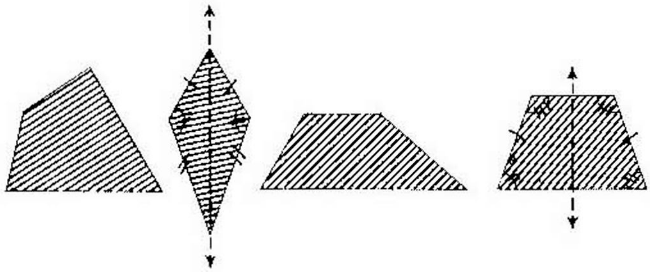
Cada uno de los cuadriláteros dibujados en la figura 34 aparece con las pequeñas marcas que muestran cuáles son los lados y los ángulos congruentes. Algunas propiedades adicionales aparte de las que se han empleado en la clasificación, merecen ser mencionadas:

[2] En algunas definiciones se reemplaza "exactamente" por "al menos".

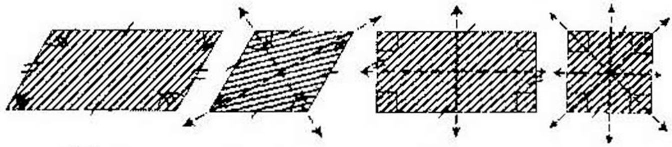
En una cometa, los ángulos opuestos son congruentes.
En un trapezoide isósceles, dos pares de ángulos adyacentes son congruentes.
En un paralelogramo, ambos pares de lados opuestos son congruentes; y también ambos pares de ángulos opuestos son congruentes.
En un rectángulo, todos los ángulos son ángulos rectos.

Volvamos ahora a las regiones cuadrangulares dibujadas en la figura 34(a) a (h). Cálquese cada una de estas regiones cerradas y trácense todos los ejes de simetría para cada una de ellas. Los dibujos resultantes deben parecerse a los de la figura 35. En cada caso se indica el número de ejes de simetría bajo el dibujo de la región cerrada. ¿Nota el lector alguna relación entre las partes congruentes y los ejes de simetría?

Podemos resumir los resultados para los distintos tipos de cuadriláteros observando algunos rasgos interesantes. El lector recordará que cuando se



(a) 0 (b) 1 (c) 0 (d) 1



(e) 0 (f) 2 (g) 2 (h) 4

FIGURA 35

dobla una figura a lo largo de uno de sus ejes de simetría, las dos partes se acoplan perfectamente. Luego, para que una región tenga un eje de simetría su frontera debe tener, al menos, una de las siguientes propiedades:

1. Dos pares de lados adyacentes y los ángulos incluidos son congruentes como en (b), (f) y (h) de la figura 35.

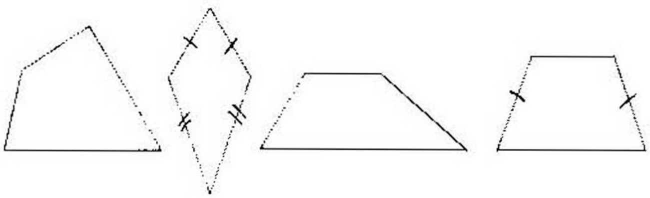
2 Dos pares de ángulos adyacentes y los lados incluidos son congruentes, como en (d), (g) y (h) de la figura 35.

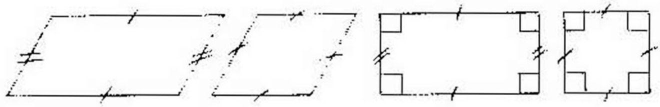
Para la propiedad 1, el eje de simetría pasa por vértices; para la propiedad 2 el eje de simetría pasa por los puntos medios de lados opuestos. Debemos observar que en cualquier caso el eje de simetría coloca los elementos de un par de partes congruentes en semiplanos opuestos, de modo que cuando la figura se doble por esa recta, estos elementos congruentes coincidirán.

Refirámonos de nuevo a la figura 35. Como (a) y (c) no tienen lados ni ángulos congruentes, se sigue que no hay en ellas ningún eje de simetría. La región cerrada en (e) limitada por un paralelogramo tampoco tiene ningún eje de simetría ya que no hay ni lados ni ángulos adyacentes que sean congruentes.

GRUPO DE EJERCICIOS 5

1.





a) Denomínese (es decir, clasifíquese) cada uno de los cuadriláteros arriba dibujados.

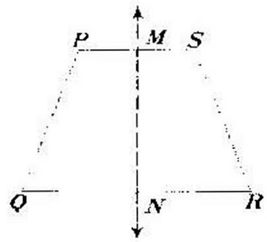
b) Cálquese cada uno de ellos y trácense en el calco todos sus ejes de simetría.

c) ¿Cuáles de las figuras tienen un eje de simetría que pasa por un vértice (simetría diagonal)?

d) ¿Cuáles de las figuras tienen un eje de simetría que pasa por los puntos medios de un par de lados opuestos (simetría mediatriz)?

2. ¿Cuáles de los cuadriláteros del ejercicio 1 tienen un centro de simetría?

3.



El cuadrilátero $PQRS$ tiene solamente una simetría mediatriz, como se muestra.

a) Si el lector dobla por el eje de simetría la figura, ¿qué punto cae sobre S?, ¿y sobre R?

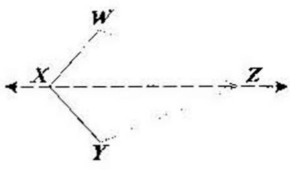
b) ¿Es $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$? ¿Puede contestar el lector sin necesidad de tomar medidas?

c) ¿Qué segmento es congruente al $\overline{PM}$?, ¿y al $\overline{NR}$?

d) ¿Tiene este cuadrilátero un centro de simetría?

e) Dígase el nombre del cuadrilátero $PQRS$ (es decir, clasifíquesele).

4.



El cuadrilátero $XYZW$ tiene solamente la simetría (diagonal) que se muestra.

a) Si doblamos a lo largo del eje de simetría, ¿qué punto cae sobre el punto W?

b) ¿Es $\triangle XYZ \cong \triangle XWZ$? ¿Puede el lector contestar sin necesidad de tomar medidas?

c) ¿Qué segmento es congruente al $\overline{XY}$?, ¿y al $\overline{WZ}$?

d) ¿Tiene este cuadrilátero un centro de simetría?

e) Dígase el nombre del cuadrilátero $XYZW$ (es decir, clasifíquesele).

Circunferencias

En el cuaderno 14: *Geometría informal*, discutimos y definimos el concepto de "curva cerrada simple". Un tipo de curva cerrada simple que merece una atención especial es la circunferencia. Como en el cuaderno 14, definimos la circunferencia como sigue:

> *Una circunferencia es una curva cerrada simple en un plano, que tiene un punto único, llamémosle P, en su interior tal que si A y B son dos puntos de la curva, entonces* $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Al punto P se le llama centro de la circunferencia. Nótese que un círculo es simétrico con respecto a su centro. El lector recordará que una curva cerrada simple separa al plano en tres conjuntos ajenos: la curva misma, su interior y su exterior. El lector puede ver que el centro de una circunferencia no es un punto del círculo, puesto que se encuentra en su interior.

Un segmento rectilíneo con un extremo en el centro de la circunferencia y el otro extremo sobre la circunferencia se llama *radio* de la circunferencia. En la figura 36, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ y $\overline{PD}$ son, todos, radios de la circunferencia. De las definiciones de circunferencia y radio se sigue que todos los radios de una circunferencia son necesariamente congruentes; es decir, $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC} \cong \overline{PD}$, etc.

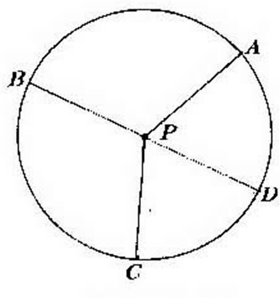


FIGURA 36

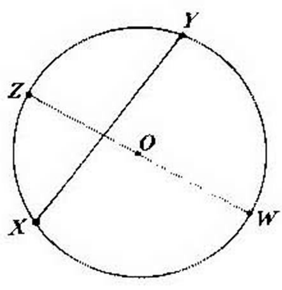


FIGURA 37

El *diámetro* de una circunferencia es un segmento rectilíneo que tiene sus puntos extremos en la circunferencia y contiene al centro de la circunferencia. En la figura 36, $\overline{BD}$ es un diámetro de la circunferencia. Una *cuerda* de una circunferencia es un segmento rectilíneo cualquiera cuyos extremos se encuentren sobre la circunferencia. En la figura 37, $\overline{XY}$ y $\overline{ZW}$

son, ambas, cuerdas de la circunferencia con centro en O. $\overline{ZW}$ es una clase especial de cuerda, a saber, un diámetro.

Dos puntos cualesquiera de una circunferencia separan a la circunferencia en dos *arcos*. Por ejemplo, los puntos X y Y de la figura 37 separan a la circunferencia en el arco que contiene al punto Z y el arco que contiene al punto W. Estos arcos se denotan, respectivamente, por los símbolos $\widehat{XZY}$ y $\widehat{XWY}$.

Una circunferencia, junto con su interior, se llama *círculo*. Una moneda circular o la cubierta de un bote de lata son representaciones físicas de círculos.

GRUPO DE EJERCICIOS 6

1. *a)* Dibújese una circunferencia y una cuerda cualquiera $\overline{AB}$ en ella. Empleando el o los dobleces adecuados encuéntrese la mediatriz de esta cuerda.
   b) ¿Contiene la recta de pliegue al centro de la circunferencia?
   c) ¿Qué clase especial de cuerda de la circunferencia contiene la línea del doblez?
   d) ¿Es esta clase especial de cuerda un eje de simetría de la circunferencia?
2. *a)* ¿Cuántos ejes de simetría tiene un círculo?
   b) ¿Qué es lo que el lector observa respecto a todos los ejes de simetría de una circunferencia?
3. Si se le diese al lector una circunferencia y no supiera dónde se encontraba situado su centro, ¿cómo podría encontrar ese centro empleando el recurso de los dobleces?

SEMEJANZA

Figuras semejantes

En la sección sobre congruencia estuvimos ocupándonos principalmente de objetos que tenían el mismo tamaño y la misma forma. En esta sección vamos a considerar objetos que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. A tales figuras se les llama figuras *semejantes*. Los cuatro círculos en la parte superior de la figura 38 son, evidentemente, semejantes, puesto que todas las circunferencias están conformadas, ciertamente, de un modo análogo, tengan o no el mismo tamaño. Lo mismo es también cierto para todos los cuadrados.

Todos nosotros tenemos muchas ideas intuitivas sobre lo que se quiere decir por semejanza entre objetos. En la conversación ordinaria tendemos a decir que dos objetos son semejantes si son parecidos en uno o más de sus aspectos obvios, por ejemplo, si tienen el mismo color, si están hechos del

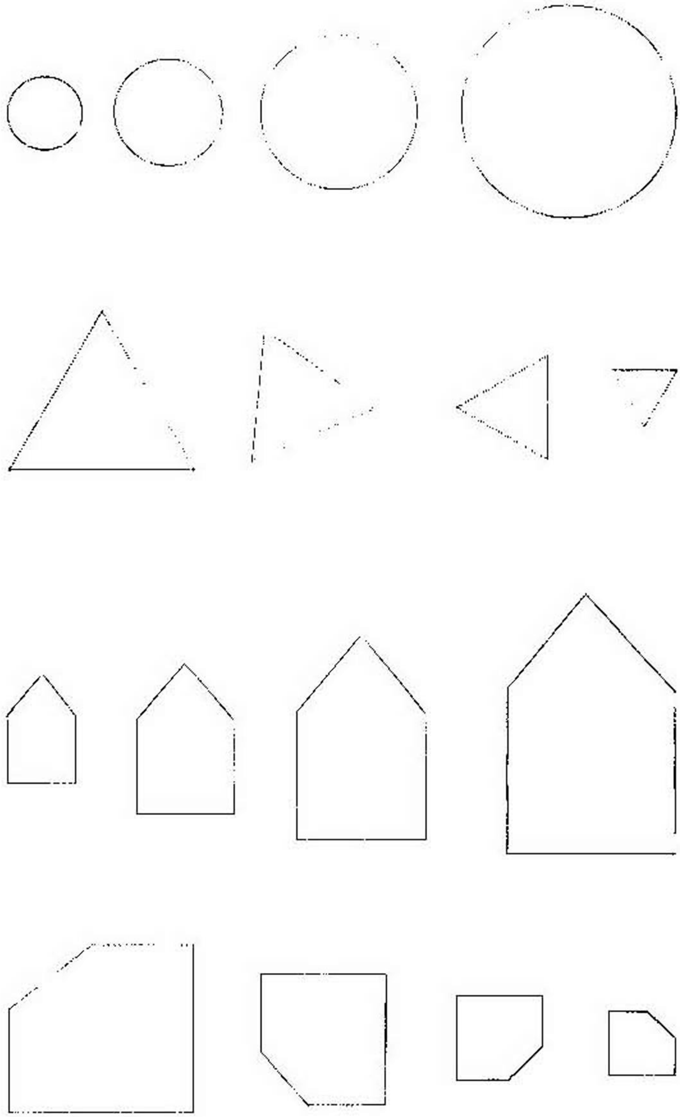


FIGURA 38

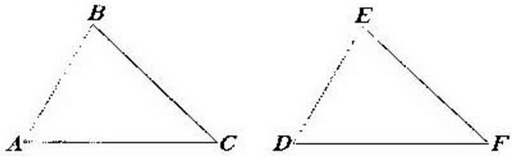


FIGURA 39

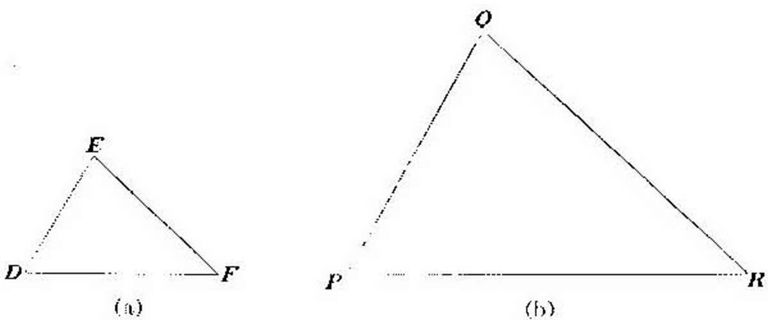
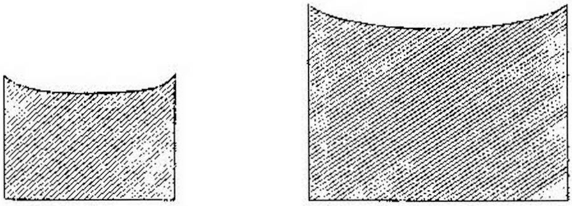


FIGURA 40

mismo material o si son del mismo sexo. En geometría, el término "semejante" se usa en un sentido más preciso, porque siempre quiere decir "que tienen la misma *forma*".

Sabemos que las figuras congruentes son iguales en tamaño y forma; luego todas las figuras que son congruentes son también semejantes. Los dos triángulos congruentes que se muestran en la figura 39 son, pues, semejantes. Pero supongamos ahora que miramos a uno de ellos, digamos al $\triangle ABC$, a través de un cristal de aumento. Cada lado del $\triangle ABC$ en la figura 40(a) está *aumentado en la misma proporción* para producir el $\triangle PQR$ de la figura 40(b). De donde el proceso de amplificación aumentó uniformemente el tamaño de $\triangle ABC$, pero preservando la figura original. De acuerdo con ello, decimos que los dos triángulos de la figura 40 son semejantes.

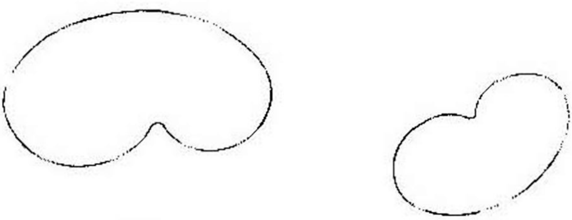
Supongamos ahora que nos dan dos figuras geométricas cualesquiera tales como las regiones dibujadas en la figura 41(a) y (b). Estas dos regiones parecen análogas en forma, pero no son congruentes, ya que la región (a) obviamente es mucho más pequeña que la región (b). ¿Cree el lector que amplificando la región (a) puede obtenerse una región que sea congruente a la que aparece dibujada en (b)? Si la contestación es "sí" (como lo es en este caso), entonces las dos figuras (a) y (b), son semejantes.



(a) (b)

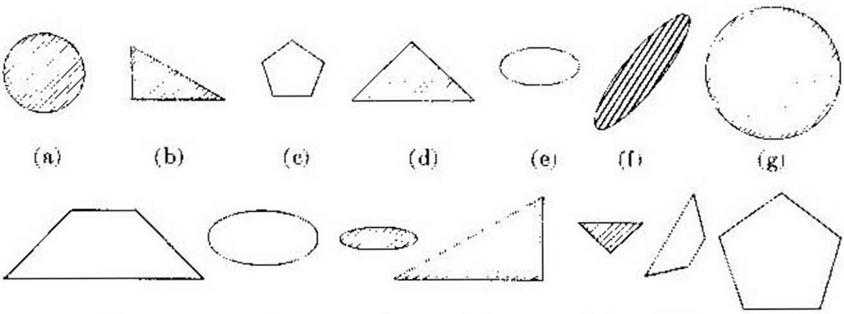
FIGURA 41

Probemos con otro ejemplo. ¿Parecen semejantes las dos curvas cerradas simples de la figura 42(a) y (b)? De nuevo la contestación es "sí". Esta vez, deberíamos imaginarnos que amplificábamos la curva cerrada



(a) (b)

FIGURA 42



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

(h) (i) (j) (k) (l) (m) (n)

FIGURA 43

simple de (b) para producir una que fuera congruente con la dibujada en (a). Debemos observar que la diferencia de orientación de las dos figuras no importa en absoluto.

Vea el lector si puede identificar figuras semejantes entre las de la figura 43. Usando nuestra idea intuitiva de amplificación, podemos identificar (a) con (g), (b) con (k), (c) con (n), (d) con (l), (e) con (i), (f) con (j), y (h) con (m) y decir que son figuras semejantes.

Todos los segmentos rectilíneos son semejantes entre sí porque todos tienen la misma "forma", aunque sean de diferente tamaño. En la figura 44,

FIGURA 44

$\overline{CD}$ es tres veces tan largo como $\overline{AB}$, y la razón de la longitud CD de $\overline{CD}$ a la longitud AB de $\overline{AB}$ es la de 3 a 1. En símbolos escribimos:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{3}{1}.$$

Triángulos semejantes

Comparemos ahora el par de triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ de la figura 45. El lector puede notar intuitivamente que estos triángulos parece que

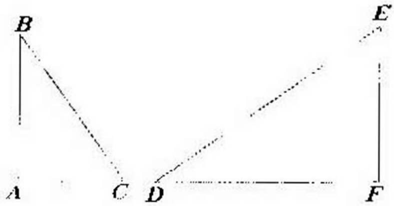


FIGURA 45

son semejantes, pero en la geometría euclidiana hay un modo preciso de comprobar si tienen exactamente la misma "forma".

Supongamos que sea el vértice A de $\triangle ABC$ el que se corresponde con el vértice F de $\triangle DEF$, ya que los ángulos correspondientes, $\angle A$ y $\angle F$, parecen tener igual medida. (Ambos parecen ángulos rectos.) Entonces, como $\overline{AC}$ parece que es el lado más corto en $\triangle ABC$, y $\overline{EF}$ el más corto en $\triangle DEF$, hagamos que correspondan los vértices C y E, y los vértices B y D. Podemos quizá visualizar la correspondencia mejor si hacemos imaginariamente girar $\triangle DEF$ un cuarto de vuelta en la dirección de las manecillas del reloj, de manera que $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ queden dispuestos como en la figura 46.

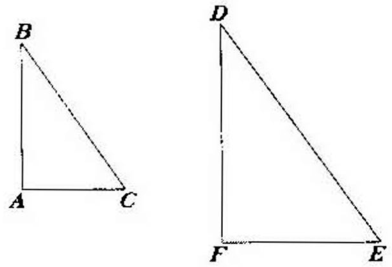


FIGURA 46

Si ahora medimos con un transportador los ángulos y nos encontramos con que $\angle BAC \cong \angle DFE$, $\angle ABC \cong \angle FDE$ y $\angle ACB \cong \angle FED$, entonces los ángulos correspondientes de $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes. ¿No parece que la longitud de cada lado de $\triangle DEF$ es aproximadamente $\frac{3}{2}$ de la longitud del lado correspondiente de $\triangle ABC$? Si al medir comprobamos que esto es así, entonces podemos escribir tres proporciones para describir este hecho:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{3}{2}, \quad \frac{DE}{BC} = \frac{3}{2}, \quad \text{y} \quad \frac{EF}{CA} = \frac{3}{2}.$$

Podemos combinar estas proporciones y escribir:

$$\frac{FD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{EF}{CA} = \frac{3}{2}.$$

Describimos esta igualdad de las razones de los lados correspondientes afirmando que *las longitudes de los lados correspondientes de los dos triángulos son proporcionales,* en razón de 3 a 2 en este ejemplo.

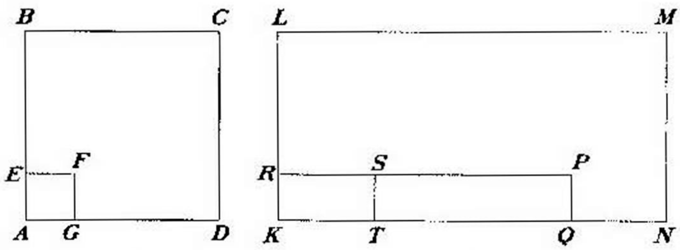
Podemos formular ahora un método preciso para la comprobación de la semejanza de triángulos:

> *Dos triángulos son semejantes si, para alguna comparación de sus vértices, los ángulos correspondientes son congruentes y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.*

Polígonos semejantes

El método anterior puede extenderse hasta incluir todos los polígonos cualquiera que sea su número de lados. Es decir, dos polígonos son semejantes si para algún emparejamiento de sus vértices en el orden en que se encuentran alrededor de los polígonos, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes tienen longitudes proporcionales. Para los polígonos de tres lados (para los triángulos), sin embargo, sucede que *una cualquiera* de estas dos condiciones es suficiente para establecer la semejanza. Es decir, dos triángulos son semejantes si es cierto *o* que los ángulos correspondientes son congruentes *o* que los lados correspondientes tienen longitudes proporcionales.

El lector recordará que un polígono es regular si todos sus lados son congruentes y todos sus ángulos son también congruentes. De ello se deduce que cualesquiera dos polígonos regulares que tengan el mismo número de lados son semejantes, porque no importa cuál sea la forma en que igualemos sus vértices, los ángulos correspondientes siempre serán congruentes y los lados correspondientes proporcionales en longitud. Todos los cuadrados



(a) (b)

FIGURA 47

son semejantes entre sí, pero no todos los rectángulos. En la figura 47(a) puede verse que los dos cuadrados $ABCD$ y $AEFG$ son semejantes porque

$$\angle B \cong \angle C \cong \angle D \cong \angle A \cong \angle E \cong \angle F \cong \angle G,$$

y (aproximadamente)

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CD}{FG} = \frac{AD}{AG} = \frac{4}{1}.$$

Pero observemos ahora a los tres rectángulos con vértice K de la figura 47(b), a saber: $KLMN$, $KRPQ$ y $KRST$. Como todos los ángulos son ángulos rectos, podemos afirmar con seguridad que no importa la forma en que alineemos los vértices en cualesquiera de estos rectángulos, los ángulos correspondientes serán congruentes. Cuando comparamos los lados de los rectángulos $KLMN$ y $KRPQ$, sin embargo, vemos que $\frac{KN}{KQ} = \frac{4}{3}$ mientras que $\frac{MN}{PQ} = \frac{4}{1}$. Por tanto, $\frac{KN}{KQ} \neq \frac{MN}{PQ}$. Tenemos aquí, pues, dos pares de lados correspondientes con longitudes que *no* están en la misma proporción. Además, $\frac{KN}{PQ} = \frac{8}{1}$, mientras que $\frac{MN}{KQ} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, de donde $\frac{KN}{PQ} \neq \frac{MN}{KQ}$. Así pues, los lados correspondientes no son proporcionales en ningún orden, y los dos rectángulos $KLMN$ y $KRPQ$ no son semejantes.

Una mirada a los rectángulos $KLMN$ y $KRST$ nos muestra que éstos *sí* parecen ser semejantes, con

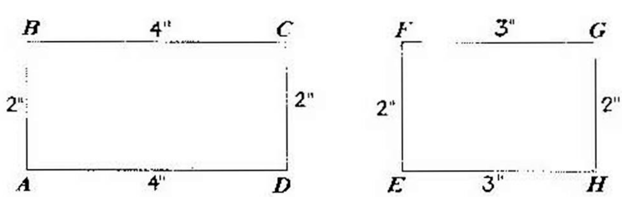
$$\frac{KL}{KR} = \frac{LM}{RS} = \frac{MN}{ST} = \frac{NK}{TK} = \frac{4}{1}.$$

GRUPO DE EJERCICIOS 7

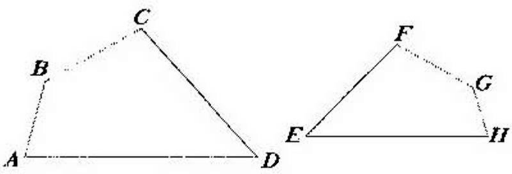
1. *a)* Cítense ejemplos de objetos semejantes entre los que el lector pueda encontrar en un supermercado, en una fábrica de automóviles, en una granja y en una cocina.
   b) ¿Es posible que algunos de estos objetos análogos puedan ser también congruentes?

2. *a)* ¿Son todos los cuadrados semejantes?
   b) ¿Son todos los triángulos semejantes?
   c) ¿Son todos los rectángulos semejantes?
   d) ¿Son todos los pentágonos regulares semejantes?
   e) ¿Son todos los hexágonos semejantes?
   f) ¿Son todos los botes de conserva semejantes?
   g) ¿Son todas las pelotas redondas semejantes?

3. Explíquese por qué los dos rectángulos que a continuación aparecen dibujados *no* son semejantes.



4. Las figuras que abajo aparecen constituyen un ejemplo de dos cuadriláteros semejantes.



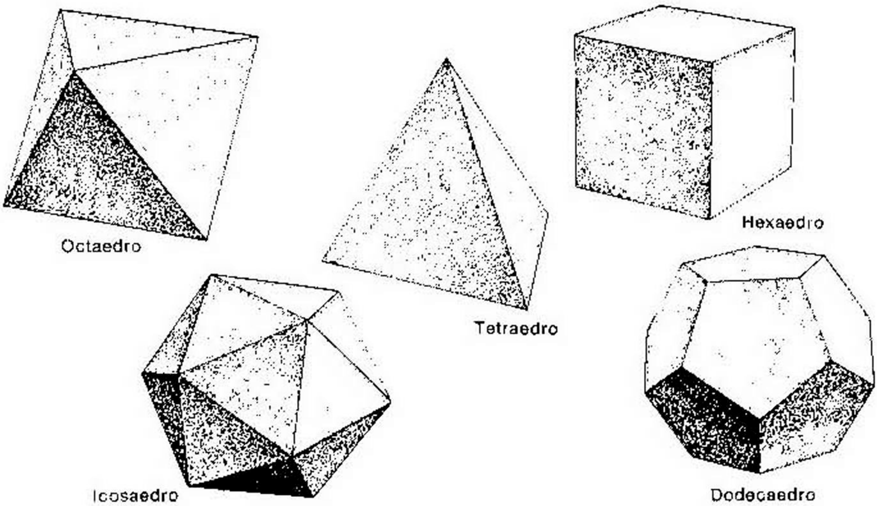
¿Cómo podrían hacerse corresponder los vértices de *ABCD* con los de *EFGH* de manera que los ángulos correspondientes fuesen congruentes?

FIGURAS TRIDIMENSIONALES

Las nociones de simetría, congruencia y semejanza que hemos desarrollado para figuras planas se ajustan igualmente bien a figuras tridimensionales. El lector puede notar que el ejercicio 1 del grupo de ejercicios 2 trata de figuras tridimensionales congruentes, y el ejercicio 1 del grupo de ejercicios 7, de figuras tridimensionales semejantes.

En el espacio de tres dimensiones, las figuras pueden tener no solo puntos y ejes de simetría, sino que también planos de simetría. Así, por ejemplo, mientras que el dibujo de la figura 4 de una muchacha de facciones muy regulares tiene un *eje* vertical de simetría, la muchacha misma tendría un *plano* vertical (desde adelante hacia atrás) de simetría. El lector y su "imagen en el espejo" en un espejo ordinario son simétricos con respecto al plano del espejo. Una esfera tiene infinitos ejes de simetría e infinitos planos de simetría, a saber, todas las rectas y todos los planos que pasen por el centro de la esfera; pero el *centro* de la esfera es el único centro de simetría de la esfera.

Podemos clasificar las figuras tridimensionales de un modo igual, en gran parte, al que empleamos para clasificar las figuras planas. Al hacer tal clasificación, nos vemos llevados a muchas consideraciones y descubrimientos interesantes. Por ejemplo, mientras que hay un número infinito de polígonos regulares (ya que el número de lados puede ser cualquier número mayor o igual que tres; véase la figura 32), hay solamente cinco *poliedros* regulares: el tetraedro regular, el hexaedro regular (o cubo), el octaedro regular, el dodecaedro regular y el icosaedro regular (figura 48). El número V de vértices, E de aristas y F de caras de estos poliedros regulares están tabula-



Los sólidos regulares.

FIGURA 48

dos en la tabla I. Es interesante notar en la tabla que para el tetraedro regular los números se presentan en el mismo orden hacia adelante que hacia atrás (4, 6, 4) y que se presentan en el mismo orden hacia adelante para el hexaedro y el dodecaedro regulares que el que tienen hacia atrás para

TABLA I

Poliedro regular	*V*	*E*	*F*
Tetraedro	4	6	4
Hexaedro	8	12	6
Octaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

el octaedro y el icosaedro regulares respectivamente. A causa de estas relaciones, el hexaedro y el octaedro regulares se dice que son figuras *duales*, como también lo son el dodecaedro y el icosaedro regulares; el tetraedro regular es su propio dual.

Puede también notarse que los números especificados en la tabla I ilustran el *teorema de Euler* que afirma que para *cualquier* poliedro simple se tiene

$$V - E + F = 2.$$

RESUMEN

En este cuaderno hemos pedido al lector que considere muchos objetos geométricos imaginándolos, observándolos y construyéndolos. Esperamos que esta actividad haya clarificado y reforzado su intuición geométrica de manera que pueda transmitir más fácilmente las nociones geométricas a sus alumnos.

Aunque las figuras tridimensionales son más difíciles de representar en el pizarrón que las figuras planas, lo cierto es que vivimos en el espacio y desde el día en que nacemos estamos acostumbrados a tocar objetos sólidos. Por ello, muchos de nosotros desarrollamos una intuición más amplia de las figuras tridimensionales que de las figuras planas. Por ejemplo, incluso los niños en edad preescolar pueden clasificar y colocar sus bloques en pilas formadas por los que tienen el mismo tamaño y la misma forma. Al enseñar geometría a niños muy pequeños, es una buena idea comenzar a hacerlo partiendo de situaciones que intuitivamente les sean conocidas.

Lecturas complementarias

Entre las diversas referencias útiles que tratan del tema que aquí se ha introducido, están las siguientes:

BRUMFIEL, CHARLES F. y KRAUSE, EUGENE F. *Elementary Mathematics for Teachers,* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969. Puede obtenerse en Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. 01867.

SENSIBA, DANIEL E. "Geometry and Transformations", en *Enrichment Mathematics for the Grades.* Vigesimoséptimo anuario del National Council of Teachers of Mathematics. Washington, D.C.: The Council, 1963. Puede obtenerse en el National Council of Teachers of Mathematics, 1201 Sixteenth St., N.W., Washington, D.C. 20036.

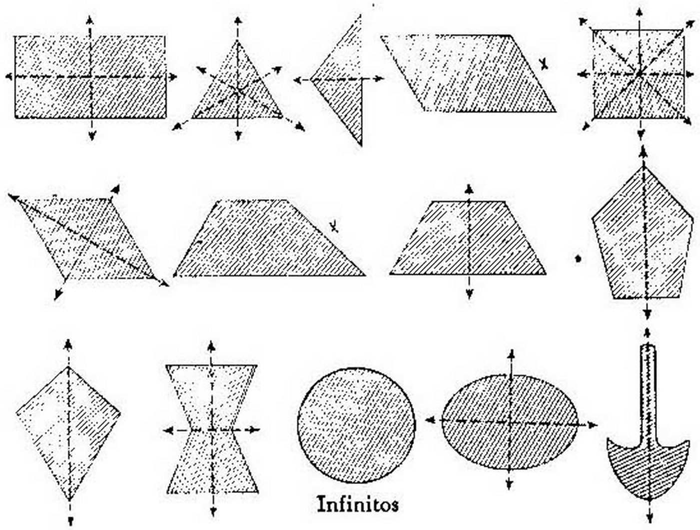
SMART, JAMES R. *Introductory Geometry; An Informal Approach.* Belmont, Calif.: Brooks/Cole, 1967. 224 páginas. Puede obtenerse en Brooks/Cole, Belmont, Calif. 94002.

WEAVER, JAY D. y WOLF, CHARLES T. *Modern Mathematics for Elementary Teachers* (segunda edición). Scranton, Pa.: International Textbook Co., 1968. 274 páginas. Puede obtenerse en la International Textbook Co., Scranton, Pa. 18515.

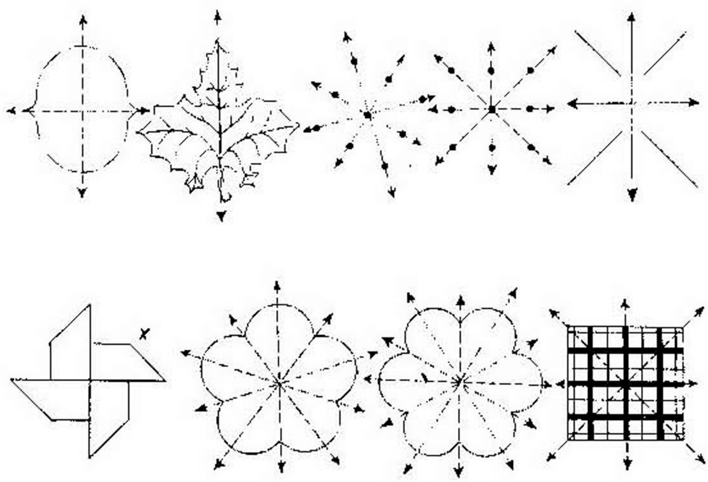
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1 (pág. 19)

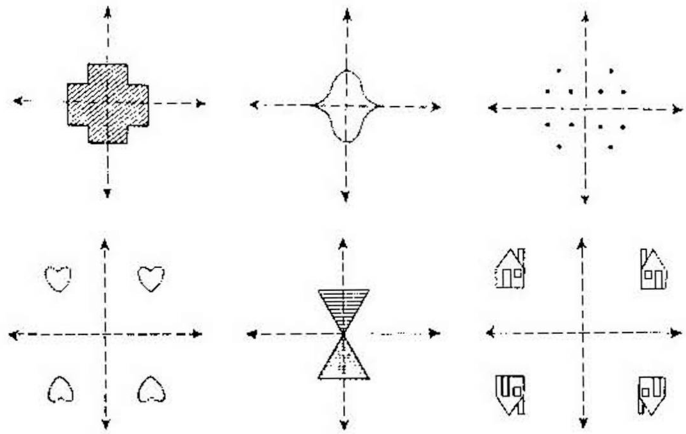
1.



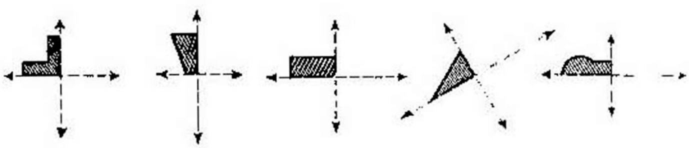
2.



3.

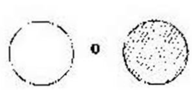


4.



5. *a)* Sí.
b) Sí.
c) No.
d) Sí.
e) Sí.
f) Sí.
g) No.
h) No.
i) Sí.
j) No.

6.



Grupo de ejercicios 2 (pág. 30)

1. Todos los botes de 150 gramos de sopa de tomate de la misma marca, todas las monedas de la misma sección de una caja registradora, todas las cajas de litro y medio de helado de la marca X, etc.; tornillos, parabrisas, guardabarros, llaves, pomos, etc., para el mismo modelo y año de un determinado carro; botes de leche, herramientas, sacos de grano,

postes, etc.; cucharillas de té, platos, botellas con especias, estos y muchos más objetos que tienen el mismo tamaño y forma son congruentes.

2. Sí.

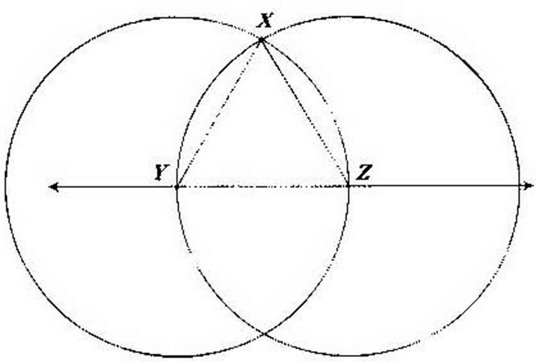
3. *a)* Son perpendiculares entre sí.
   b) Un ángulo recto.
   c) $\angle BCD$.

4. *a)* $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.
   b) $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

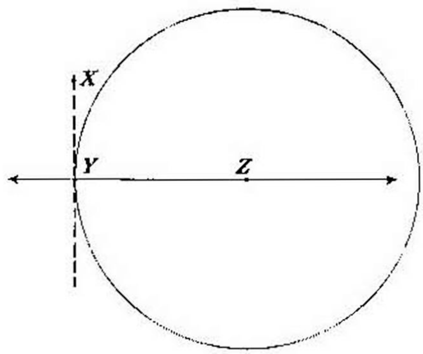
5. Véase el ejercicio 4.

Grupo de ejercicios 3 (pág. 34)

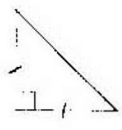
1.



2. *a)* No. El lector puede verificar esto marcando un segmento, $\overline{YZ}$, congruente con $\overline{AB}$. Se dobla después el papel para obtener una recta de pliegue perpendicular a $\overline{YZ}$ en el punto Y. Se marca el punto X de modo que $\overline{XY} \cong \overline{AB}$. Se colocan las puntas del compás sobre A y B, y se dibuja una circunferencia con Z como centro. Esta circunferencia no intersecará a $\overleftrightarrow{XY}$ en X, por tanto, no puede formarse ningún triángulo equilátero XYZ.



b) Sí, por ejemplo:



c) No. (La verificación es muy semejante a la dada en *a*).)

3. La región cerrada triangular se balanceará en este punto, pero no en ningún otro.

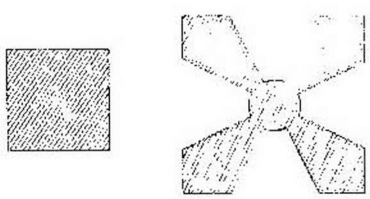
4. *a)* Sí.
   b) Sí.
   c) Sí.
   d) Sí.

5. *a)* No.
   b) No.
   c) No.
   d) No.

6. *a)*

etc.

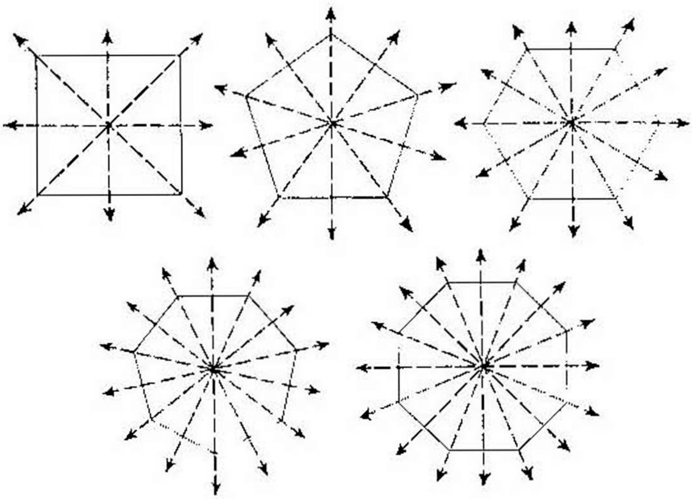
b)



etc.

Grupo de ejercicios 4 (pág. 37)

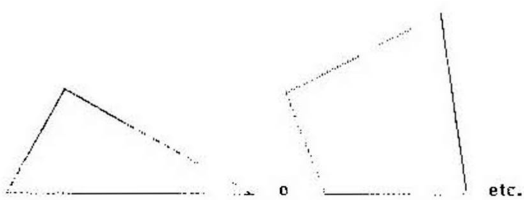
1.



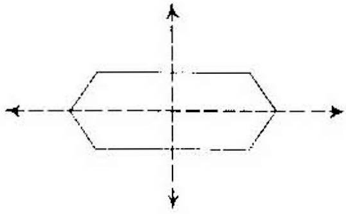
El número de ejes de simetría de una región cerrada limitada por un polígono regular, es igual al número de lados del polígono regular.

2. No.

3.



4. *a)* Sí.



b) No.
c) Sí, si es regular.

Grupo de ejercicios 5 (pág. 41)

1. *a)* Véase la figura 34.
   b) Igual que para las regiones cerradas correspondientes dibujadas en la figura 35.
   c) Cometa, rombo, cuadrado.
   d) Trapezoide isósceles, rectángulo, cuadrado.

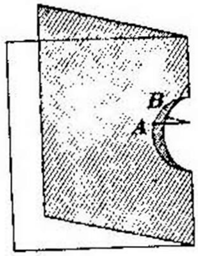
2. Paralelogramo, rombo, rectángulo, cuadrado.

3. *a)* P; Q.
   b) Sí. Sí; ya que $\overleftrightarrow{MN}$ es un eje de simetría, estos dos segmentos deben coincidir cuando se hace el doblez.
   c) $\overline{MS}$; $\overline{QN}$.
   d) No.
   e) Trapezoide isósceles.

4. *a)* Y.
   b) Sí. Sí, ya que estos dos ángulos deben coincidir cuando se hace el doblez a lo largo del eje de simetría, $\overleftrightarrow{XZ}$.
   c) XW; YZ.
   d) No.
   e) Cometa.

Grupo de ejercicios 6 (pág. 44)

1. *a)* La línea de pliegue es la mediatriz de AB. El papel está doblado de forma que B caiga sobre A.



b) Sí.
c) Un diámetro.
d) Sí.

2. *a)* Infinitos.
b) Todos ellos pasan por el centro de la circunferencia. (Cada uno de ellos contiene un diámetro de la circunferencia.)

3. Dóblese para obtener cualquiera de los dos ejes de simetría. Se intersecan en el centro de la circunferencia.

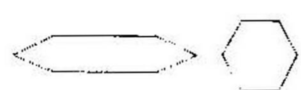
Grupo de ejercicios 7 (pág. 51)

1. *a)* Monedas de diez centavos, de cinco, de veinticinco; botes que tienen la misma forma, cajas, etc.; todas las tuercas cuadradas, las llaves de un juego de llaves, neumáticos, etc.; cubetas, herramientas, etc.; cubiertas de jarras, cucharitas de té y cucharas; platos para comida y postre, ollas, etc.; que tienen la misma forma.
b) Sí. (Nótese, además, que todos los objetos congruentes que se enumeraron en el grupo de ejercicios 2 podían incluirse aquí como semejantes.)

2. *a)* Sí.
b) No; por ejemplo, estos no son triángulos semejantes:

c) No; por ejemplo, estos no son rectángulos semejantes:

d) Sí.
e) No; por ejemplo, estos no son hexágonos semejantes:



f) No; por ejemplo, un bote de sopa y uno de atún quizá no sean semejantes:

g) Sí.

3. Porque los vértices no pueden hacerse corresponder en forma tal que haga que las longitudes de los lados correspondientes sean proporcionales; tenemos

$$\frac{AB}{EF} = \frac{2}{2} \text{ y } \frac{AD}{EH} = \frac{4}{3}, \quad \text{y} \quad \frac{2}{2} \neq \frac{4}{3};$$

también se tiene

$$\frac{AB}{EH} = \frac{2}{3} \text{ y } \frac{AD}{EF} = \frac{4}{2}, \quad \text{y} \quad \frac{2}{3} \neq \frac{2}{4}.$$

4. A, B, C, D se corresponden con H, G, F, E, respectivamente.

Esta obra terminó de imprimirse el día 31 de enero de 1972, en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A., Centeno 162, Col. Granjas Esmeralda, México 13, D. F.

Se tiraron 1 000 ejemplares más sobrantes de reposición

Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda auxiliar tanto a los maestros en su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.

Títulos que componen esta colección:

1. Conjuntos
2. Números enteros
3. Sistemas de numeración para los números enteros
4. Algoritmos de las operaciones con números enteros
5. Números y sus factores
6. Números racionales
7. Sistemas de numeración para los números racionales
8. Proposiciones numéricas
9. El sistema de los enteros
10. El sistema de los números racionales
11. El sistema de los números reales
12. Lógica
13. Gráficas, relaciones y funciones
14. Geometría informal
15. Medida
16. Recopilación, organización e interpretación de datos
17. Sugerencias para resolver problemas
18. Simetría, congruencia y semejanza

OTRO TÍTULO

Manual de lógica para estudiantes de matemáticas
Gonzalo Zubieta Russi

Es una valiosa ayuda para la mejor comprensión del lenguaje matemático. Ofrece a los estudiantes de matemáticas, el material que necesitan sobre técnicas de orden lógico del manejo del lenguaje matemático, el empleo de métodos eficaces de razonamiento, etc., ya que, muchas de las dificultades con que tropiezan se deben a la falta de familiaridad con todos estos factores.